＜論　文（動学マクロ経済学）＞

ハイパーボリック割引選好モデルにおける異時点間の所得移転政策

藤　生　　　裕

1．はじめに

動学マクロ経済学の分野において，近年，ハイパーボリック割引選好モデルの特徴が明らかにされつつある。このモデルは，時間選好率に関して，遠い将来の時点より現在に近い時点にいる方が将来をより割り引く（ハイパーボリック割引）といった特徴をもつ選好，言い換えれば，近視眼的な選好をもつような家計の行動を捉えることができる。実際，Harris and Laibson (2001)が説明するように，実験および実証研究から，人々の行動は（経済行動も含めて）近視眼的な傾向にあることが判明している。(1) このため，このようなモデルの特徴づけは，現実の経済政策を検討する上でも重要なテーマであると位置づけられる。

本論文は，ハイパーボリック割引選好モデルにおいて，政府による異時点間の所得移転政策の効果を検討する。特に，家計の消費水準に影響を与えるかどうかを詳細に検討してみたい。

ハイパーボリック割引選好モデルは，その特殊ケースとして，最適成長モデルを含んでいる。最適成長モデルにおいて，Barro (1974)は，政府による異時点間の所得移転政策が家計の最適消費経路に影響を与えないこと（中立性命題）を示した。これは，家計の最適消費経路が，政府の所得移転政策とは独立の一定の時間選好率に依存して決まることから得られる結論である。一方，ハイパーボリック割引選好モデルでは，時間選好率が政府の所得移転政策により変化

---

(1) Harris and Laibson (2001) 935ページ1-2行目参照。

する可能性をもち，それゆえ，中立性命題が成立するかどうかは定かでない。そこで，本論文では，このモデルにおいても中立性命題が成立するための十分条件を提示する（命題１）。

さらに，本論文では，例題を用いて，均衡における家計の消費水準について検討する。この例題は，まず，効用関数を対数型に仮定することで，限界貯蓄性向が一定となる均衡を特徴づけることができ，それゆえ，中立性命題が成立することを示している（命題２）。また，政府による異時点間の所得移転政策が前もってアナウンスされた通りに行われない場合，つまり，途中で政策変更があった場合でも，この均衡では，家計の消費に影響がないことが明らかにされる（命題３）。

本論文の内容は次の通り。第２節では，ハイパーボリック割引選好モデルを定式化し，均衡を特徴づける。さらに，この節で，中立性命題が成立する十分条件を提示する。第３節では，例題を用いて，均衡における家計の消費水準について検討する。第４節では，今回の研究で残された課題を示してある。

２．モデル

ここでは，Harris and Laibson (2001)により提示されたモデルをベースに定式化をおこなう。違いは，本論文では，第１に，労働所得の期待値を利用している点[(2)]，第２に，政府による異時点間の所得移転 $\{g_t\}$ を考慮している点である。[(3)]

経済を代表的な家計の行動で捉えることにする。家計は，t 期に手持ち資金 $x_t \geqq 0$ をもち，その中から消費水準 c_t を選択する（ $c_t \in [0, x_t]$ ）。手持ち資産

(2) Harris and Laibson (2001)は，労働所得の期待値を用いる代わりに，その分布を与えている。

(3) ここで政府移転額の系列を $\{g_t\}$ と表現しているように，特に時期を特定しなくても不都合がない場合，以降の説明では，系列の表記を単にこのようにおこなうことにする。

から消費を除き，さらに政府移転額 g_t を差し引いた分が貯蓄 s_t となる。

$$s_t = x_t - c_t - g_t \tag{1}$$

このとき，元利合計の利子率をR（≧1）とおくと，t+1期にはRs_tの蓄財を生む。これに労働所得 y_{t+1}を合わると，t+1 期の手持ち資金 x_{t+1}となる。

$$x_{t+1} = Rs_t + y_{t+1} \tag{2}$$

各期の労働所得は，生産性のショックで変動しており，時間と独立に値が決まる。ここでは，その期待値はある一定の値（$\overline{y}$）をとるものと仮定する。

$$E_t[y_{t+1}] = \overline{y} \tag{3}$$

さて，政府移転額 g_t について説明を加えておこう。これは，政府が家計の各期所得に影響を与えることを通じて，消費水準にも影響を与えることを目的としておこなうものである。政府は，前もって，系列$G_{t+1} = \{g_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}$をアナウンスしておく。（アナウンス通りに政府移転額が実現しない場合も後に議論する。）これは，$g_t > 0$ならば課税として，$g_t < 0$ならば補助金として機能する。また，政府は，所得移転額に関して，（異時点間を通じて）財源の均衡をはかっているものとする。

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_{t+1}}{R^i} = 0 \tag{4}$$

この中で，Rは元利合計の利子率を表わしており，それゆえ，左辺は政府移転額の割引現在価値の総和を表わしている。それが0であるというは，所得移転政策をおこなうのにあたり，政府が他の財源を必要としない，または，余剰

を生まないことを示している。

次に家計の選好について説明する。家計は，ハイパーボリック割引選好をもつものとする。このとき，t世代の効用 v_t は，次のように表わされる。

$$v_t = E_t[\,u(c_t) + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i})] \tag{5}$$

但し，

$$\alpha \neq \beta \quad かつ \quad 0 < \beta < 1$$

とする。このような構造をもつ効用関数については，藤生 (2002) が議論しているように，

$$v_t = E_t[\,u(c_t) + (\alpha\beta - \beta)\,u(c_{t+1}) + \beta v_{t+1}] \tag{6}$$

という再帰的構造に書き換えが可能である。この再帰的構造がある場合，家計は，t期から見て将来を，t+1 期の総効用 v_{t+1} だけでなく，t+1期 の（消費から得る）1 期間の効用 $u(c_{t+1})$ でも評価する。当然，$u(c_{t+1})$ は v_{t+1} に含まれているので，重複して評価していることになる。[4] この重複した評価の部分を含むことこそ，ハイパーボリック割引選好において，動学的不整合の問題が生じる原因となっている。

なお，(6)において，$\alpha = 1$ とおくと，最適成長モデルとなることから，ここで提示するモデルにおける結論は，そのまま最適成長モデルについても言えることになる。

さて，我々は動学的に整合な均衡（均衡消費経路）が政府移転額の系列に影

(4) Hori (1997)はこの点を詳細に説明している。

響を受けるかどうかに関心がある。そこで，まず，均衡消費経路の求め方および均衡消費経路の性質を明らかにしておこう。

まず，均衡消費経路の求め方であるが，これについては，Fujiu (2001)および藤生 (2002)が提示している方法にしたがって行う。家計は，t 期において，将来（t+1期以降）の貯蓄行動を仮定する。毎期同じ最適選択問題に直面する，つまり，予算制約(1)および(2)のもとで，(6)の効用を最大化するので，どの期においても同様な貯蓄行動をとると期待できる。そこで，t+1期以降，（時期に依存しない）貯蓄行動を，次のような貯蓄の政策関数として仮定する。

$$s_\tau = S(x_\tau, G_\tau), \quad \tau \geqq t+1 \tag{7}$$

当期の貯蓄は，当期の手持ち資産と政府移転額の時系列ベクトルに依存する構造にしている。これは，手持ち資産に影響されることはもちろん，現在から将来にかけての政府所得移転政策も貯蓄額に影響すると考えられるからである。

家計にとって，(1)，(2)，(7)および労働所得の系列と政府移転額の系列ベクトルを制約として，(6)を最大にするように消費経路をとっていくことが，t期の最適選択である。均衡消費経路を記述するためには，均衡貯蓄関数を定め，手持ち資産の系列$\{x_t\}$を求めればよい。なぜなら，(1)にしたがい，各期の均衡消費水準を求めることができるからである。

そこで，均衡は，次の条件を満たす関数形$S(\cdot,\cdot)$と系列$\{x_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}$で表わされるものとする。(5)

$$S(x_t, G_t) \in \underset{s_t \in [0, x_t]}{\arg\max} \{E_t[u(c_t) + (\alpha\beta - \beta)\, u(c_{t+1}) + \beta V(x_{t+1}, \mathrm{G}_{t+1})]\} \tag{8}$$

---

(5)　Long and Shimomura (1998)は，動学微分ゲームにおいて，これと同じような均衡を，マルコフ（完全）均衡として呼んでいる。

$$s.t.\ (1), (2), (7)\ \text{and}\ given\ \mathrm{G}_t\ (\mathrm{G}_{t+1})$$

但し,

$$\begin{aligned} V(x_t,G_t) &= u(x_t - S(x_t,\mathrm{g}) - \mathrm{g}_t) \\ &\quad + (\alpha\beta-\beta)E_t[u(RS(x_t,G_t)+y_{t+1} - S(RS(x_t,\mathrm{G}_t)+y_{t+1},\mathrm{G}_{t+1}) - \mathrm{g}_{t+1})] \\ &\quad + \beta E_t[V(x_{t+1},\mathrm{G}_{t+1})] \end{aligned} \tag{9}$$

次に，均衡の性質を見てみよう。均衡において，家計の最適化条件が成立していることから，次の関係を導くことができる。

$$\frac{u'(\mathrm{c}_t)}{E_t[u'(\mathrm{c}_{t+1})]} = E_t\{[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)\,S_x(x_{t+1},\mathrm{G}_{t+1})]R\,\} \tag{10}$$

なお，$S_x(x_{t+1},\mathrm{G}_{t+1}) = \partial S(x_{t+1},\mathrm{G}_{t+1})/\partial x_{t+1}$である。

それでは，政府の所得移転政策（つまり，系列G_{t+1}）が(10)を満たす消費経路，つまり，均衡消費経路$\{c_t\}$に与えるかどうかを検討しよう。(10)の右辺に均衡貯蓄関数が含まれており，これが系列G_{t+1}に依存していることから，(政府による）異時点間の所得移転政策が家計の消費に影響を与えそうである。

しかしながら，(10)をよく見ると，最適消費経路は手持ち資産変化に対する貯蓄の変化分（S_x）に依存しているに過ぎない。そこで，均衡貯蓄関数が，

$$S(x_{t+1},\mathrm{G}_{t+1}) = \phi(x_{t+1}) + \psi(G_{t+1}) \tag{11}$$

かつ，ある定数$\bar{\phi}$が存在し，

$$\phi'(x_{t+1}) = \bar{\phi} \tag{12}$$

となるとしよう。このとき，S_xは一定値となり（$S_x=\bar{\phi}$），家計の最適化の一階

条件は，手持ち資産（x_{t+1}）および政府移転額の系列（G_{t+1}）とは無関係に成立することがわかる。したがって，貯蓄政策関数が(11)および(12)を満たすような場合，政府の所得移転政策によっても家計の最適消費経路が影響を受けない。[6]

命題 1

この経済において，均衡貯蓄関数が(11)および(12)を満たす場合，政府による異時点間の所得移転政策は，家計の最適消費経路に影響を与えない。

（証明）補論を参照のこと。

次の節では，このことを例題を用いてさらに検討しよう。

3．所得移転政策の効果

上記の議論をパラメトリックに解くことのできる例を挙げて検討して見よう。なお，(12)は貯蓄が状態変数（手持ち資産）の線形関数として表現できることを示している。政策関数が状態変数の線形関数として表現できる均衡については，藤生 (2001) が提示しているものがあり，それを利用することにする。

各期の効用関数$u(c_t)$を次のような自然対数型に仮定する。

$$u(c_t)=ln\, c_t \tag{13}$$

藤生 (2001)は，効用関数をこのように仮定すると，均衡政策関数が状態変数

(6)　最適成長モデル（$\alpha=1$）のケースでは，S_xを含む項が消去されるため，(11)と(12)のような仮定を置かなくても，所得移転政策により最適消費経路が影響を受けることはない。

の線形関数と表わせることを示している。それにしたがい，本論文でも貯蓄関数

$$s_{t+1}=\phi(x_{t+1})+\psi(G_{t+1})$$

において，

$$\phi(x_{t+1})=ax_{t+1}+b,\ 0<a<1 \tag{14}$$

と仮定する。ここで，a，bは未知の定数であり，均衡を求める過程で明らかになる。なお，$0<a<1$は，限界消費性向が1未満であることを意味しており，手持ち資産の増加以上に消費が増加しないということを仮定しているに過ぎない。

以上の設定を(10)に適用し整理すると，

$$E_t[c_{t+1}]=[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]Rc_t$$

となり，さらに，(1)，(2)を代入し整理すると，

$$\begin{aligned} s_t=&\frac{\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a}{(1-\mathrm{a})+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]}x_t \\ &+\frac{b+E_t[y_{t+1}+\psi(y_{t+1})+g_{t+1}]-[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]Rg_t}{(1-\mathrm{a})R+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]R} \end{aligned} \tag{15}$$

を求めることができる。

均衡であるためには，(15)が$s_t=ax_t+b+\psi(G_t)$と記述できることが必要である。それゆえ，係数比較により，以下の関係を得る。

$$a=\frac{\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a}{(1-\mathrm{a})+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]} \tag{16}$$

$$b=\frac{b+E_t[y_{t+1}]}{(1-a)R+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]R} \tag{17}$$

$$=\frac{b+\bar{y}}{(1-a)R+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]R}$$

$$\psi(G_t)=\frac{E_t[\psi(G_{t+1})+g_{t+1}]-[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]Rg_t}{(1-a)R+[\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta)a]R} \tag{18}$$

仮定より，$0<a<1$であることに注意すると，(16)，(17)から，

$$a=\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta-\beta},\qquad b=\frac{\bar{y}}{R-1}$$

を得る。さらに，これらを(18)に代入すると，

$$\psi(G_t)=\frac{E_t[\psi(G_{t+1})+g_{t+1}]-aRg_t}{R}$$

となり，さらに，繰り返し代入することで，

$$\psi(G_t)=-g_t+(1-\mathrm{a})\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t[g_{t+i}]}{R^i}$$

を得る。ここで，所得移転政策の財源均衡条件より。

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t[g_{t+i}]}{R^i}=0$$

が成立しているので，

$$\psi(G_t) = -g_t$$

となる。それゆえ，

$$s_t = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta-\beta}x_t + \frac{\bar{y}}{R-1} - g_t \tag{19}$$

である。このとき，手持ち資産の系列は，

$$x_{t+1} = \frac{\alpha\beta R}{1+\alpha\beta-\beta}x_t + \frac{\bar{y}R}{R-1} - Rg_t + y_{t+1} \tag{20}$$

にしたがう。

それでは，政策の効果を見ていくことにしよう。(19)からわかるように，当期の貯蓄は，家計が計画している額から当期の政府移転額相当をちょうど差し引いた額になっている。つまり，当期において課税（増税）されるなら（$g_t>0$），その分だけ貯蓄を減らし，反対に，当期において補助金が与えられるなら（$g_t<0$），その分を余分に貯蓄する。こうした家計の貯蓄行動は，家計の消費経路を変化させないように機能する。政府の所得移転政策に対して，家計は貯蓄を増減させることで，消費へ影響がでないようにするからである。

家計の予算制約に(19)を代入すると，

$$\begin{aligned} c_t &= x_t - s_t - g_t \\ &= \frac{1-\beta}{1+\alpha\beta-\beta}x_t - \frac{\bar{y}}{R-1} \end{aligned} \tag{21}$$

となり，家計の消費は，政府移転額とは独立に決まることが確認できる。

命題 2

家計の効用関数が自然対数型で，かつ，均衡貯蓄関数が状態変数（手持ち資産）に関して線形型である場合，政府による異時点間の所得移転政策は，家計の最適消費経路に全く影響を与えない。

（証明）上記の議論を参照。

さらに，この経済では興味深い点が見出せる。均衡貯蓄関数は，政府移転額の系列 G_{t+1}に依存するものと仮定したが，結局，求められた均衡貯蓄関数は，当期の政府移転額 g_tのみに依存している（(19)参照)。つまり，家計は，当期の政府移転額に応じて，当期の貯蓄を決定しさえすればよい。このことは非常に強い意味をもつ。

これまで，我々は，政府が移転額の系列を前もってアナウンスし，それに応じて，家計が最適選択をすると想定してきた。しかしながら，家計の最適選択にとって重要なのは，政府移転額の系列よりも，むしろ，当期の政府移転額の水準である。したがって，政府が前もってアナウンスしていた移転額の系列とは異なる移転額が実現しても，家計は，当期の政府移転額に応じて貯蓄水準を変化させ，（もとの）最適消費を選択できる。つまり，この経済では，異時点間の所得移転政策が効果をなさないだけでなく，途中の政策変更によっても効果がない。

命題 3

家計の効用関数が自然対数型で，かつ，均衡貯蓄関数が状態変数（手持ち資産）に関して線形型である場合，政府が異時点間の所得移転政策を途中で変更しても，均衡貯蓄関数に変更はない。それゆえ，家計の最適消費経路にも影響はない。

（証明）(19)および(20)より，明らかである。

4．おわりに

本論文では，Harris and Laibson (2001)で提示されているハイパーボリック割引選好モデルにおいて，限界貯蓄性向が時間を通じて一定である場合，政府による異時点間の所得移転政策は家計の最適消費経路に影響を与えないことを示した。このことから，限界貯蓄性向がある範囲内に留まるならば，政府による異時点間の所得移転政策によっても家計の最適消費経路がほとんど影響を受けないということを類推できる。この点を明らかにすることが残された課題の1つである。

参考文献

[1] Barro, R. J. (1974) "Are government bonds net wealth?" *Journal of Political Economy* 82, 1095-1117.

[2] Fujiu, H. (2001) "Intergenerational altruism and hyperbolic discount utility," mimeo., Chiba Keizai University.

[3] Harris, C. and D. Laibson (2001) "Dynamic choices of hyperbolic consumers," *Econometrica* 69, 4, 935-957.

[4] Hori, H. (1997) "Dynamic allocation in an altruistic overlapping generations economy," *Journal of Economic Theory* 73, 292-315.

[5] Laibson, D. (1997) "Golden eggs and hyperbolic discounting," *Quarterly Journal of Economics* 62, 443-479.

[6] Long, N. V. and K. Shimomura (1998) "Some results on the Markov equilibria of a class of homogeneous differential games," *Journal of Economic Behavior & Organization* 33, 557-566.

[7] 藤生　裕 (2001)「時間整合な消費プランの効率性」，『千葉経済論叢23号』，115-132.

[8] 藤生　裕 (2002)「ハイパーボリック割引的選好モデルにおける均衡の一意性と安定性の条件」，『千葉経済論叢27号』，31-43.

補論（命題1の証明）

均衡貯蓄関数が(11)および(12)を満たすものとする。また，(2)が成立することに注意する。このとき，各期の消費が，

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= x_{t+1} - \phi(x_{t+1}) - \psi(G_{t+1}) - g_{t+1} \\
c_{t+2} &= R[\phi(x_{t+1}) + \psi(G_{t+1})] + y_{t+2} \\
&\quad - \phi(R[\phi(x_{t+1}) + \psi(G_{t+1})] + y_{t+2}) - \psi(G_{t+2}) - g_{t+2} \\
c_{t+3} &= R\{\phi(R[\phi(x_{t+1}) + \psi(G_{t+1})] + y_{t+2}) + \psi(G_{t+2})\} + y_{t+3} \\
&\quad - \phi(R\{\phi R[\phi(x_{t+1}) + \psi(G_{t+1})] + y_{t+2}) + \psi(G_{t+2})\} + y_{t+3}) - \psi(G_{t+3}) - g_{t+3} \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

のようになることから，総効用関数(5)を用いると，t期の最適な貯蓄s_tの条件は，

$$
\frac{dv_t}{ds_t} = u'(c_t) + E_t\left[\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i u'(c_{t+1}) \cdot (1-\bar{\phi}) R(\bar{\phi} R)^{i-1}\right] = 0 \qquad \text{(A1)}
$$

となる。ここで，t+1期の最適化条件 $dv_{t+1}/ds_{t+1} = 0$ より，

$$
\beta \bar{\phi} R u'(c_{t+1}) = \alpha \sum_{i=2}^{\infty} \beta^i u'(c_{t+1}) \cdot (1-\bar{\phi}) R(\bar{\phi} R)^{i-1}
$$

なので，これを(A1)に代入し整理すると，

$$
u'(c_t) = [\alpha\beta - (\alpha\beta - \beta)\bar{\phi}] R u'(c_{t+1})
$$

を得ることができる。これは，家計の最適化条件(10)と同値である。

さらに，家計の異時点間の予算制約式は，(1)および(2)より，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_{t+i}}{R^{i}}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g_{t+i}}{R^{i}}=R\bar{s}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y_{t+i}}{R^{i}}$$

となる。(ここでは，$x_t=R\bar{s}+y_t$とおいている。) 但し，上式において，政府移転の財政は均衡していることから ((4)を参照)，結局，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_{t+i}}{R^{i}}=R\bar{s}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y_{t+i}}{R^{i}} \tag{A2}$$

を得る。これは，消費経路が初期保有資産 ($R\bar{s}$) と生涯所得 ($\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y_{t+1}}{R^{i}}$) にだけ制約されることを示している。

以上のことから、異時点間の予算制約条件(A2)および家計の異時点間の最適消費選択に関する一階条件(10)は，政府移転額から独立に決まることがわかる。したがって，政府による異時点間の所得移転政策は，家計の最適消費経路に影響を与えない。(証明終わり)

(ふじう　ひろし　本学講師)