

<論文(数理経済学)>

ハイパーボリック割引的選好モデルにおける 均衡の一意性と安定性の条件

藤 生 裕

1. はじめに

近年、ゲーム理論における動学ゲームの研究が進むにつれて、動学的不整合性を生み出すような選好の研究にも注目が集まりつつある。こうした動学的不整合の問題をどう取り扱うかについては、動学的一般均衡の研究分野では、古くから議論されてきている。特に、Laibson のハイパーボリック割引的選好の研究 (Laibson (1996), Laibson (1997)) は、動学的不整合性が比較的生じやすく、それゆえ、その研究がこの分野にとって重要なテーマであることを改めて提示した。

動学的不整合性を生み出すような選好を研究する際、問題となるのが、均衡をどのように捉えるのかという問題である。これは、世代間利他性の分野では古くから議論されており、最近では、Hori(1997) やFujiu (2000) において詳細に議論されている。また、別の問題として、均衡が一意であるか、さらには、均衡は安定的であるかといったものもある。均衡が一意で安定的であるほうが、分析をより容易にすることは明らかである。そこで、本稿では、近年注目を浴びつつある動学的不整合選好のうち、ハイパーボリック割引選好に焦点をあて、その均衡が一意で、かつ、安定的であるようなモデルを提示することを目的とする

なお、本稿はハイパーボリック割引的選好をもつモデル (ハイパーボリック割引的選好モデル) だけを提示しているが、Fujiu (2001) において議論されたように、ハイパーボリック割引的選好モデルと世代間利他性モデルにおける最

適化問題は共通化できることから、世代間利他性モデルへの応用が可能である。

本稿の構成は次の通り。第2節でモデルの構築および均衡の定義を提示する。第3節で均衡の存在を示す。第4節で均衡の特徴づけをおこなう。第5節は本稿の内容のまとめである。

2. モデル

この経済は、決定論的な経済であり、無限に続いている。 t 期に生まれる世代を t 世代と呼ぶことにする。個人は皆同質であると仮定し、各世代を1人で代表させることにする。 t 世代は、1期間だけ生き、その間の消費 c_t から感じる効用は $u_t = u(c_t)$ と表されるものとする。さらに、 t 世代は、次世代以降の効用も自らの効用の一部として評価する。そこで、 t 世代の総効用 U_t は、

$$U_t = u_t + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u_{t+1+i} \quad (1)$$

と表される。ここで、 α と β は、それぞれ、世代間割引率と t 世代の時間選好率であり、

$$\alpha \neq \beta \quad (2)$$

および

$$0 < \beta < 1$$

を満たす。 t 世代は、前世代から、たとえば、遺産のような形態で、資本 k_t を受け取り、それを投入し、 $f(k_t)$ の産出を得る。 t 世代は、所得 $f(k_t)$ を消費 c_t と次世代への残す資本（遺産） k_{t+1} とへ配分する。

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) \quad (3)$$

上記の (1) に見られるような選好を、ハイパーボリック割引的選好 (hyper-

bolic discounting preference) と呼ぶ。各世代がハイパーボリック割引的選好を持つ場合, Laibson (1997) および Fujiu (2001) において議論されているように, 各世代の最適選択は, 動学的不整合を引き起こす。しかしながら, このような動学的不整合は長期にわたり続くと考えるのには疑問がある。動学的不整合が歴史的に繰り返されてきたとき, 合理的な世代は, 自らの選択した最適(投資)プランが将来実現しないという事実を認識するだろう。そのとき, この合理的な世代は別の最適プラン, すなわち, 思い描いたとおりに将来実現するという意味での動学的整合なプラン(動学的整合プラン)を考慮するようになる。

上記の(1)は再帰的構造をもつので, 次のように書き換えることができる。

$$U_t = u_t + (\alpha - \beta) u_{t+1} + \beta U_{t+1} \quad (4)$$

この式に見られるように, ハイパーボリック割引的選好は単純な再帰的構造をもつわけではない。このような再帰的構造は, 世代間利他性モデルにおいても見受けられる。Hori (1997) は, $t+1$ 世代の消費を評価した効用 u_{t+1} と, $t+1$ 世代の厚生を評価する効用 U_{t+1} という2つのパターンを含む世代間利他的な選好であると考えた。そして, このような選好をもつモデルの均衡を捉えるのに, 通常のベルマン方程式を適用することは無理であることを指摘した。そこで, 我々は, 次のような修正ベルマン方程式を使って, 均衡, すなわち, 動学的整合プランの存在を示そう。

まず, $w_{t+1} = (\alpha - \beta) u_{t+1} + \beta U_{t+1}$ と定義する。ここで, w_{t+1} は $w(k_{t+1})$ と表すことに注意し,

$$\begin{aligned} \kappa_w(k_t) &\in \arg \max_{k_{t+1}} \{u(f(k_t) - k_{t+1}) + w(k_{t+1})\} \\ \text{s.t. } 0 &\leq k_{t+1} \leq f(k_t), \text{ given } k_t \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} (Tw)(k_t) &= (\alpha - \beta) u(f(k_t) - \kappa_w(k_t)) \\ &\quad + \beta [u(f(k_t) - \kappa_w(k_t)) + w(\kappa_w(k_t))] \\ &= \alpha u(f(k_t) - \kappa_w(k_t)) + \beta w(\kappa_w(k_t)) \end{aligned}$$

を定義する。上記にもとづき、以下の条件を満たす $(w^*, \{k_t\}_{t=0}^{\infty})$ を均衡と呼ぶ：

$$\forall k \in R_+, w^*(k) = (Tw^*)(k) \quad (5)$$

かつ

$$k_0 = \bar{k}, k_{t+1} = kw^*(k_t), t = 0, 1, \dots \quad (6)$$

ここで、(5) を満たす均衡評価関数 w^* が存在すれば、それは同時に、均衡政策関数 κ_{w^*} が存在することになるので、(6) を満たす時系列 $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ も存在することになる。そこで、次節以降では、(5) を満たす w^* の存在をもって、均衡の存在と呼ぶことにする。

3. 仮定、定理（均衡の存在）、および証明の手順

仮定 1: $u: R_+ \rightarrow R_+$ は次の条件を満たす。

(U1) u は連続 (continuous), かつ、強い凹性をもつ (strictly concave)

(U2) u は連続微分可能 (continuously differentiable)

(U3) u は強い増加性をもつ (strictly increasing)

(U4) $u'' < 0, u''' = 0$

(U5) ある $M < \infty$ が存在し、任意の $c \geq 0$ について、 $|u(c)| \leq M$ が成立する。

仮定 2: $f: R_+ \rightarrow R_+$ は次の条件を満たす。

(F1) f は連続 (continuous)

(F2) f は連続微分可能 (continuously differentiable)

(F3) f は強い増加性をもつ (strictly increasing)

(F4) $f''' = 0$

仮定 3: 集合 B は、次の条件を満たす有界な関数 $w: R_+ \rightarrow R_+$ を要素にもつ集合 (空間) である。

(W1) w は連続 (continuous) かつ凹性をもつ (concave)

(W2) w は連続微分可能 (continuously differentiable)

(W3) w は強い増加性をもつ (increasing)

(W4) $w'' \leq 0, w''' = 0$

定理 (均衡の存在) T は少なくとも 1 つの不動点 $\hat{w} \in B$ をもつ

以降, 我々はこの定理の証明をおこなう。そのためには, Blackwell (1965) で提示されているように, (i) $T: B \rightarrow B$, (ii) T は単調 (monotone), および (iii) T は縮小写像 (contraction mapping)であることを示しさえすればよい。

命題 1 (自己写像) T は B をそれ自身に写像する

(証明) u, f, w は, ともに, 連続かつ連続微分可能なので, $(Tw)(x)$ の定義より, Tw は連続かつ連続微分可能である。 $x_n > 0$ および $w \in B$ とする。このとき,

$$y_n \in \arg \max_{0 \leq y \leq f(x_n)} \{u(f(x_n) - y) + w(y)\} \quad (7)$$

を定義する。ただし, 上式の中で, “ $\arg \max_{0 \leq y \leq f(x_n)} \{u(f(x_n) - y) + w(y)\}$ ” は,

$u(f(x_n) - y) + w(y)$ を最大にする $y \in [0, f(x_n)]$ の集合を意味する。

補題 1 y_n は一意である (unique)

(証明) 補題 1 が成立しないと仮定する。では,

$$y_n^0, y_n^1 \in \arg \max_{0 \leq y \leq f(x_n)} \{u(f(x_n) - y) + w(y)\}$$

および, $y_n^0 \neq y_n^1$ とする。このとき,

$$u(f(x_n) - y_n^0) + w(y_n^0) = u(f(x_n) - y_n^1) + w(y_n^1) \quad (8)$$

である。任意の $a \in (0, 1)$ をとり, それを固定した上で, $y_n^2 = ay_n^0 + (1-a)y_n^1$ をとる。 u は強く凹性を持ち, かつ, w は凹性をもつことから,

$$u(f(x_n)-y_n^2)+w(y_n^2) > a[u(f(x_n)-y_n^0)+w(y_n^0)] \\ + (1-a)[u(f(x_n)-y_n^1)+w(y_n^1)] \quad (9)$$

が成立する。(8) および (9) より,

$$u(f(x_n)-y_n^2)+w(y_n^2) > u(f(x_n)-y_n^0)+w(y_n^0)$$

となるが, これは, y_n^0 の仮定に矛盾する。それゆえ, y_n は一意である。

(証明終わり)

補題 1 より, (7) を

$$y_n \in \arg \max_{0 \leq y \leq f(x_n)} \{u(f(x_n)-y)+w(y)\} \quad (10)$$

のように書き換えることができる。

補題 2 $x_0 \geq x_1$ とする。このとき, $u(f(x_0)-y_0) \geq u(f(x_1)-y_1)$, かつ, $w(y_0) \geq w(y_1)$ 。

(証明) $x_0 = x_1$ ならば, (10) より, $y_0 = y_1$ である。このため, $u(f(x_0)-y_0) = u(f(x_1)-y_1)$, かつ, $w(y_0) = w(y_1)$ が成立する。そこで, $x_0 > x_1$ の場合を考えよう。 $y_0 < y_1$ と仮定する。このとき, y_0 と y_1 の仮定より, $f(x_0) > f(x_1) \geq y_1 > y_0$,

$$u(f(x_0)-y_0)+w(y_0) \geq u(f(x_0)-y_1)+w(y_1) \quad (11)$$

および,

$$u(f(x_1)-y_1)+w(y_1) \geq u(f(x_1)-y_0)+w(y_0) \quad (12)$$

が成立する。 $w(y_0) \leq w(y_1)$ なので, (11) と (12) より,

$$u(f(x_0)-y_0)-u(f(x_0)-y_1) \geq u(f(x_1)-y_0)-u(f(x_1)-y_1)$$

となるが, これは

$$(f(x_0)-y_0)-(f(x_0)-y_1) = (f(x_1)-y_0)-(f(x_1)-y_1)$$

と $f(x_0)-y_0 > f(x_1)-y_0$, かつ, u が強い凹性をもつことに矛盾する。それゆえ, $y_0 \geq y_1$ である。

これを2つの場合に分けて考えてみよう。まず、 $y_0 = y_1$ のとき、 $f(x_0) - y_0 > f(x_1) - y_1$ となる。次に、 $y_0 > y_1$ とする。以下では、

$$f(x_0) - y_0 \geq f(x_1) - y_1 \quad (13)$$

であることを示す。それでは、(13)が成立しないものと仮定する。 $f(x_0) - y_0 = f(x_1) - \bar{y}$ 、かつ、 $f(x_1) - y_1 = f(x_0) - \tilde{y}$ を満たすような、 \bar{y} 、 \tilde{y} をとる。このとき、 $y_0 - \bar{y} = \tilde{y} - y_1$ 、 $y_0 > \tilde{y}$ 、 $f(x_0) - \tilde{y} \geq 0$ 、および、 $f(x_1) - \bar{y} \geq 0$ である。 y_0 と y_1 は、それぞれ、

$$u(f(x_0) - y_0) + w(y_0) > u(f(x_0) - \tilde{y}) + w(\tilde{y}) \quad (14)$$

および

$$u(f(x_1) - y_1) + w(y_1) > u(f(x_1) - \bar{y}) + w(\bar{y}) \quad (15)$$

の一意解 (unique solution) である。 $u(f(x_0) - y_0) = u(f(x_1) - \tilde{y})$ 、かつ、 $u(f(x_1) - y_1) = u(f(x_0) - \bar{y})$ なので、(14)と(15)より、

$$w(y_0) - w(\bar{y}) > w(\tilde{y}) - w(y_1)$$

が成立する。しかしながら、これは、 $y_0 - \bar{y} = \tilde{y} - y_1$ 、 $y_0 > \tilde{y}$ 、かつ、 w は凹性をもつことに矛盾する。このため、(13)が成立する。

それゆえ、 u および w は強い増加性をもつことから、 $u(f(x_0) - y_0) \geq u(f(x_1) - y_1)$ および $w(y_0) \geq w(y_1)$ が成立する。(証明終わり)

補題3 $w \in B$ 、および、 $x_0 \geq x_1$ とする。このとき、 $(Tw)(x_0) \geq (Tw)(x_1)$ が成立する。

(証明) 補題2より、 $u(f(x_0) - y_0) \geq u(f(x_1) - y_1)$ 、および、 $w(y_0) \geq w(y_1)$ が成立する。そのため、

$$(Tw)(x_0) = \alpha u(f(x_0) - y_0) + \beta w(y_0)$$

かつ

$$(Tw)(x_1) = \alpha u(f(x_1) - y_1) + \beta w(y_1)$$

より, $(Tw)(x_0) \geq (Tw)(x_1)$ である。(証明終わり)

補題4 $w \in B$ とする。このとき, $(Tw)(x)$ は x に関して凹性をもつ。

(証明) これを示すためには, $(Tw)''(x_0) \leq 0$ であることを示せばよい。定義より,

$$(Tw)(x) = \alpha u(f(x) - y) + \beta w(y)$$

なので, 一階の微分は

$$(Tw)'(x) = \alpha u' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right) + \beta w' \cdot \frac{dy}{dx}$$

となる。さらに, 微分すると,

$$\begin{aligned} (Tw)''(x) = & \alpha \left[u'' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right)^2 + u' \left(f'' - \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) \right] \\ & + \beta \left[w'' \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + w' \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。最適化条件より, $u'(f(x) - y) = w'(y)$ であるので, x と y に関して全微分をとり, 整理すると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u''}{u'' + w''} f'$$

となる。さらに, 上式を x に関して微分すると,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{u'''(u'' + f'') - u'' \left(u''' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right) + w''' \frac{dy}{dx} \right)}{(u'' + w'')^2} f' + \frac{u''}{u'' + w''} f''$$

となる。 $u''' = 0$, $f' = 0$, かつ, $w''' = 0$ なので,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

このため, $u'' < 0$, かつ, $u''' < 0$ なので, (16) より,

$$(Tw)''(x) = \alpha u'' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right)^2 + \beta w'' \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 < 0. \quad (17)$$

である。(証明終わり)

補題5 $w \in B$ とする。このとき, $(Tw)'''(x) = 0$ が成立する。

(証明) (17) より, $(Tw)''$ を微分すると,

$$\begin{aligned} (Tw)'''(x) = & \alpha u''' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right)^3 + 2\alpha u'' \left(f' - \frac{dy}{dx} \right) \left(f'' - \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) \\ & + \beta w''' \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \beta w'' \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \end{aligned}$$

を得る。 $u''' = w''' = f'' = 0$, かつ, 補題4より, $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0$ なので,
 $(Tw)'''(x) = 0$ が成立する。(証明終わり)

以上の補題1から5までにより, Tw は w と同じ性質をもつことが示された。それゆえ, T は B をそれ自身に写像する。(命題1の証明終わり)

ここで, \hat{B} は, $\hat{B} \subset B$, かつ, $\hat{w}^0, \hat{w}^1 \in \hat{B}$ および $x_0, x_1 \in X$ に関して,

$$\hat{w}^0(x_0) - \hat{w}^0(x_1) = \hat{w}^1(x_0) - \hat{w}^1(x_1)$$

を満たす集合であるとする。このとき, 次の命題が成立する。

命題2 T は \hat{B} をそれ自身に写像する

(証明) これを示すためには,

$$(T\hat{w}^0(x_0) - (T\hat{w}^0(x_1) = (T\hat{w}^1(x_0) - (T\hat{w}^1(x_1).$$

を示しさえすればよい。そこで, まず, 次の補題を示す。

補題6 $w^0, w^1 \in \hat{B}$,

$$y^0 = \arg \max_{0 \leq y \leq f(x)} \{u(f(x) - y) + w^0(y)\}$$

および,

$$y^1 = \arg \max_{0 \leq y \leq f(x)} \{u(f(x) - y) + w^1(y)\}$$

と仮定する。このとき, $y^0 = y^1$ である。

(証明) この補題が成立しないと仮定する。このとき, $y^1 \neq y^0$, かつ,

$$u(f(x) - y^0) + w^1(y^0) < u(f(x) - y^1) + w^1(y^1) \quad (18)$$

を満たす y^1 をとることができる。補題6の仮定より,

$$u(f(x) - y^0) + w^0(y^0) > u(f(x) - y^1) + w^0(y^1) \quad (19)$$

である。(18) と (19) より,

$$w^0(y^0) - w^0(y^1) > w^1(y^0) - w^1(y^1)$$

が成立するが, これは $w^0, w^1 \in \hat{B}$ であることに矛盾する, それゆえ, $y^0 = y^1$ である。(証明終わり)

$(Tw)(x)$ の定義より,

$$\begin{aligned} & (T\hat{w}^0)(x_0) - (T\hat{w}^0)(x_1) \\ &= [\alpha u(f(x_0) - y_0) + \beta \hat{w}^0(y_0)] - [\alpha u(f(x_1) - y_1) + \beta \hat{w}^0(y_1)] \end{aligned} \quad (20)$$

が成立する。ここで $\hat{w}^0(y_0) - \hat{w}^0(y_1) = \hat{w}^1(y_0) - \hat{w}^1(y_1)$ であることから,

$$\begin{aligned} & [\alpha u(f(x_0) - y_0) + \beta \hat{w}^0(y_0)] - [\alpha u(f(x_1) - y_1) + \beta \hat{w}^0(y_1)] \\ &= [\alpha u(f(x_0) - y_0) + \beta \hat{w}^1(y_0)] - [\alpha u(f(x_1) - y_1) + \beta \hat{w}^1(y_1)] \end{aligned} \quad (21)$$

である。さらに, 補題6より,

$$y_0 = \arg \max_{0 \leq y \leq f(x_0)} \{u(f(x_0) - y) + \hat{w}^1(y)\}$$

かつ

$$y_1 = \arg \max_{0 \leq y \leq f(x_1)} \{u(f(x_1) - y) + \hat{w}^1(y)\}$$

なので,

$$(T\hat{w}^1)(x_0) = \alpha u(f(x_0) - y_0) + \beta \hat{w}^1(y_0) \quad (22)$$

および

$$(T\hat{w}^1)(x_1) = \alpha u(f(x_1) - y_1) + \beta \hat{w}^1(y_1) \quad (23)$$

が成立する。したがって, (20), (21), (22), および, (23) より,

$$(T\hat{w}^0)(x_0) - (T\hat{w}^0)(x_1) = (T\hat{w}^1)(x_0) - (T\hat{w}^1)(x_1)$$

である。それゆえ、 T は \hat{B} をそれ自身に写像する。(命題2の証明終わり)

命題3 (単調性) $w_1, w_2 \in \hat{B}$, および、任意の $y > 0$ に関して、 $w_1(y) \geq w_2(y)$ とする。このとき、任意の $y > 0$ に関して、 $(Tw_1)(y) \geq (Tw_2)(y)$ が成立する。

(証明) ある $y > 0$ をとり、

$$x_1 = \arg \max_{0 \leq x \leq y} \{u(y-x) + w_1(x)\}$$

かつ、

$$x_2 = \arg \max_{0 \leq x \leq y} \{u(y-x) + w_2(x)\}$$

を定義する。 $w_1, w_2 \in \hat{B} \subset B$ なので、補題6より、 $x_1 = x_2$ である。このとき、

$$\begin{aligned} & (Tw_1)(y) - (Tw_2)(y) \\ &= [\alpha u(y-x_1) + \beta w_1(x_1)] - [\alpha u(y-x_2) + \beta w_2(x_2)] \geq 0. \end{aligned}$$

が成立する。(命題3の証明終わり)

命題4 (縮小写像) ある $\ell \in [0,1)$ が存在し、任意の $w \in \hat{B}$ に関して、

$$T(w+a) = Tw + \ell a \tag{24}$$

が成立する。

(証明) $w \in \hat{B}$ および $y > 0$ をとる。ここで、

$$x' = \arg \max_{0 \leq x \leq y} \{u(y-x) + w(x)\}$$

を定義しよう。このとき、任意の y に関して、

$$T(w+a)(y) = \alpha u(y-x') + \beta(w+a)(x') \tag{25}$$

である。さらに、

$$(w+a)(x) = w(x) + a$$

および,

$$(Tw)(y) = \alpha u(y-x') + \beta w(x')$$

であることから, (25) は,

$$\begin{aligned} T(w+a)(y) &= \alpha u(y-x') + \beta w(x') + \beta a \\ &= (Tw)(y) + \beta a \end{aligned}$$

と書き換えられる。 $0 < \beta < 1$ なので, (24) が成立する。(証明終わり)

以上の議論より, 定理 (均衡の存在) は証明された。

4. 均衡の性質

ここでは, 均衡の特徴づけを簡単におこなう。前節で見たように, 均衡評価関数 w^* は, 有界で, 凹性をもつ, 連続な関数である。このとき, 次の命題が成立する。

命題 5 均衡は, 一意であり, かつ, 安定的である

(証明) これを示すためには, (a) $Tw^* = w^*$ を満たす w^* がたった 1 つだけ存在すること, かつ, (b) $w_0 \in \hat{B}$ と $w_n = T^n w_0$ を定義するとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\| = 0$$

であることを示せばよい。($\|\cdot\|$ は sup ノルムとする。) 命題 2 より, T は \hat{B} をそれ自身に写像する。さらに, 命題 4 より, 任意の $w \in \hat{B}$ をとると, ある $\ell \in [0, 1)$ が存在し,

$$\|Tw - w^*\| \leq \ell \|w - w^*\|$$

となる。それゆえ, 均衡が一意かつ安定的であることが確立される。(命題 5 の証明終わり)

最後に, 均衡政策関数 κ_{w^*} について, 少し触れておく。 w^* は一意かつ安定的であるので, κ_{w^*} も, また, その性質をもつ。さらに, $\kappa_{w^*}(y)$ は, 補題 2 より, y に関して増加であり, また, 最大値原理より, y に関して連続である。

5. おわりに

本稿では、ハイパーボリック割引的選好モデルにおいて、一意かつ安定的な均衡が存在するような条件を提示した。「はじめに」でも触れたように、Fujiu (2001) は、ハイパーボリック割引的選好モデルが、最適化問題の段階においては、世代間利他性モデルと同じ問題を解いていることを明らかにした。このことは、本稿のハイパーボリック割引的選好モデルにおける一意かつ安定的な均衡が、世代間利他性モデルにも存在する可能性を示唆する。その明示的な証明は別の論文に譲ることにする。

参考文献

- [1] Blackwell, D. (1965) "Discounted dynamic programming," *Annals of Mathematical Statistics* 36, 226-235.
- [2] Fujiu, H. (2000) "Intergenerational transfers motivated by altruism from children towards parents: children's gifts and parents' education investments," mimeo., Chiba Keizai University.
- [3] Fujiu, H. (2001) "Intergenerational altruism and hyperbolic discount utility," mimeo., Chiba Keizai University.
- [4] Hori, H. (1997) "Dynamic allocation in an altruistic overlapping generations economy," *Journal of Economic Theory* 73, 292-315.
- [5] Laibson, D. (1996) "Hyperbolic discount functions, undersaving, and saving policy," NBER working paper 5635.
- [6] Laibson, D. (1997) "Golden eggs and hyperbolic discounting," *Quarterly Journal of Economics* 112, 139-171.

(本学専任講師 ふじう ひろし)