<論　文>

時間整合な消費プランの効率性

藤　生　　　裕

1．はじめに

経済学の基本的な考えでは，各個人の意思決定により実現する資源配分は，すべての個人にとって望ましいものである。しかしながら，各世代の意思決定により実現する資源配分は，すべての世代にとって望ましいものであるとは必ずしも言えない。それは，各世代の意思決定が互いに矛盾するような場合，ある世代が意図した世代間の資源配分が，次の世代により改められてしまい，同じような構造がつづくことで，どの世代も意図した資源配分が実現せず，それゆえ意図した厚生も得られなくなってしまうからである。このような場合，政府による世代間の資源の再配分は支持されるが，一方で恣意的な配分になる可能性が高く，別の弊害が出てくるだろう。そこで，恣意性を排除し，すべての世代にとってより望ましい資源配分（効率的な資源配分）をどのように達成すべきかという問題が提起される。

本論文では，政府により提示される選択ルールに各世代がしたがって意思決定をおこなうとき，すべての世代が合意するような資源配分が実現し，かつ，それはルールにしたがわないときの資源配分よりも各世代にとって望ましい可能性が高いことを示す。政府が選択ルールを提示するだけの存在であり，この選択ルールにしたがったときの各世代の厚生の方が高いのであれば，政府の恣意性を排除した効率的な資源配分として支持されるだろう。本論文を通じて，政府の役割は，世代間の資源配分への直接介入ではなく，選択ルールの提示のみである。

選択ルールは，時間整合な資源配分問題の１つとして研究されてきている。

任意の世代の望ましいと考える選択（最適選択）が，その他の世代の最適選択と矛盾のないとき，各世代の最適選択により世代間で意見の対立のない資源配分（時間整合な資源配分）が実現し，それは同時にどの世代にとってももっとも望ましい資源配分（最適資源配分）でもある。伝統的な研究では，各世代の最適選択により時間整合な資源配分が実現するケースが主に扱われてきた（Barro (1974), Yano (1984)）。しかしながら，近年の研究において，異なる世代がお互いの厚生を考慮するとき，各世代の最適選択が，必ずしも時間整合な資源配分を実現させるとは限らず，それゆえ，必ずしも最適な資源配分を実現させるとは限らないことが明らかにされてきている。(Hori and Kanaya (1989), Hori (1992))。このような時間整合的でない（時間不整合な）資源配分が生じるケースにおいて，各世代が一定の選択ルールにしたがうことにより時間整合な資源配分 —— しかし，最適資源配分ではない —— が実現することが明らかにされてきている。

このような議論をうけて，近年において，時間不整合な資源配分が生じるモデルの構造が明らかにされつつある。Laibson (1997)は，各世代が子供を含む子孫の世代の厚生を考慮するような経済において，考慮の際の割引率が一定でないと，各世代の最適選択により時間不整合な資源配分が生じることを示している。[1] Hori (1997)は，各世代が親を含む先祖の世代と子供を含む子孫の世代の両方の厚生を考慮するような経済においては，考慮の際の割引率が一定であろうとなかろうと，各世代の最適選択により時間不整合な資源配分が生じる可能性が高いことを示している。

また，各世代の最適選択により時間不整合な資源配分が実現してしまう場合でも，どの世代も合意をするような選択ルールが存在し，それゆえ，時間整合な資源配分 —— しかし，最適資源配分ではない —— が存在することが明

1　この研究は離散モデルである。連続モデルはBarro (1999)を参照のこと。

らかにされてきている。藤生 (1999)は，子供が親の厚生を考慮して最適選択を行うような経済では，各世代の最適選択にしたがうと時間不整合な資源配分が実現してしまうことを説明している。Fujiu (2000)では，そのような経済でも，どの世代も合意をするような「子供が親へ向けて行う所得移転のルール」（ギフトのルール）が存在し，それにしたがえば時間整合な資源配分が実現することを示している。

選択ルールがサポートされる為には，時間不整合な資源配分の厚生より，選択ルールにしたがったときの —— 時間整合的であるが，最適ではない —— 資源配分の厚生の方が高くなければならない。藤生 (1999)は，子供が親の厚生を考慮して最適選択をおこなうような経済において，選択ルールにしたがったときの時間整合な資源配分の方が高い厚生を示す例を提示している。しかしながら，伝統的に想定される経済 —— 各世代が子供を含む子孫の世代の厚生を考慮するが，考慮の際の割引率が一定でないような経済 —— においては，まだおこなわれていない。そこで，本論文では，このような経済において，選択ルールにしたがったときの時間整合な資源配分の方が高い厚生を示す例を提示し，同時にその可能性が高いことも説明してみたい。

2．設定

経済は過去と未来に無限に続いているものとする。経済に不確実性はなく，また時間を通じて完全情報が仮定される。経済に存在する主体はみな同質であると仮定する。

t 期に生まれる世代を t 世代と呼ぶことにする。t 世代は，1 期間のみ生きるものとする。この 1 期間における t 世代の消費をc_tと，その効用を$u(c_t)$と表わすことにする。t 世代は，t 世代以降に生まれる世代の効用も自らの効用として感じる。t 世代の総効用関数は，

$$U_t = u(c_t) + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+1+i}) \tag{1}$$

と表わされる。ここでは，$u'>0$，$u''<0$と仮定する。また，αはt世代が$t+1$世代以降の効用をどの程度評価するかを決定づける割引因子を，βはt世代が評価する$t+1$世代以降の世代間の時間選好率を表わしており，

$$0<\beta<\alpha<1 \tag{2}$$

のような関係を仮定する。

t世代は，t期において，所得y_tを受け取り，それをt世代自身の消費と$t+1$世代に残す資産（資本）k_{t+1}に配分する。

$$c_t + k_{t+1} = y_t \tag{3}$$

t期において選択された資本は，$t+1$期において，$t+1$世代の所得y_{t+1}を生む。この両者の関係は，生産関数

$$y_{t+1} = f(k_{t+1}) \tag{4}$$

として表わされる。

t世代の最適選択を考える前に，まず，上記の効用関数（式(1)）の特徴を明らかにしておこう。式(1)における割引はハイパーボリック（hyperbolic）と呼ばれる。割引がハイパーボリックであるとは，(1)のように，$t+1$世代の効用$u(c_{t+1})$はαのみの割引因子を持つのに対して，$t+2$世代以降の効用$u(c_{t+1+i})$（$i \geqq 1$）は$\alpha\beta^i$の割引因子をもつような場合をいう。[2] このような特徴をもつ効用関数を用いた場合，各世代の最適選択は，他の世代の最適選択

と矛盾する —— 時間不整合が生じる —— ことが，これまでの研究で明らかにされている。[3]　t 世代にとっての最適選択が，

$$u'(c_t)/u'(c_{t+1})=\alpha f'(k_{t+1}),\ u'(c_\tau)/u'(c_{\tau+1})=\beta f'(k_{\tau+1}),\ \tau\geq t+1$$

であることから，ここで考えるような消費プラン$\{c_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}$は，

$$u'(c_\tau)/u'(c_{\tau+1})=\alpha f'(k_{\tau+1}),\ \ \tau\geq t \tag{5}$$

を満たすものである。以下では，(5)を満たす消費プランのことを「各世代の自己最適による消費プラン」と呼ぶことにする。

各世代の自己最適による消費プランが時間不整合であるとき，それは最適資源配分ではない。このとき，すべての世代にとってより望ましい（効率的な）資源配分が存在するかもしれない。その候補として，時間整合な —— しかし，最適にはならない —— 資源配分を考える。Hori (1997) や Fujiu (2000) が明らかにしているように，現在の世代が，将来の世代の政策関数を所与として，自身の最適選択をしたとき，その選択が将来の世代と同じ政策関数として表わされるならば，その政策関数で表わされる各世代の選択の列は時間整合となる。本論文の場合も，同様にして，時間整合的な消費プランをとることができる。

2　伝統的な動学最適化問題で用いられる割引は，エクスポーネンシャル（exponential）と呼ばれるもので，割引因子が一定であるという特徴をもつ。たとえば，t 世代は，$t+1$ 世代以降の効用を，それぞれ $\beta,\beta^2,\beta^3,\ldots\ldots$ のような割引因子で割り引く。

3　Phelps and Pollak (1968) や Laibson (1997) など。t 世代にとって最適であるような $t+1$ 世代と $t+2$ 世代の間の最適化条件は，$u'(c_{t+1})/u'(c_{t+2})=\beta f'(k_{t+2})$ であるのに対して，$t+1$ 世代自身にとっての最適化条件は — $t+1$ 世代は(1)と同様の効用関数をもつので — $u'(c_{t+1})/u'(c_{t+2})=\alpha f'(k_{t+2})$ となる。それゆえ，割引がハイパーボリックである場合，各世代の最適解が時間不整合になる。

まず，$t+1$ 世代以降が同一の投資関数

$$k_{\tau}=\kappa(y_{\tau}),\ \ \kappa'>0,\ \ \tau\geq t+1 \tag{6}$$

をもつものと仮定する。(1)を変形すると，

$$\begin{aligned}U_t&=u(c_t)+(\alpha-\beta)\,u(c_{t+1})+\beta\left[u(c_{t+1})+\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{\,i-1}u(c_{t+1+i})\right]\\&=u(c_t)+(\alpha-\beta)\,u(c_{t+1})+\beta\,U_{t+1}\end{aligned}$$

を得る。このため，時間整合な解は，(3)，(4)，(6)を用いることで，

$$\kappa(y_t)\in\underset{0\leq k_{t+1}\leq y_t}{\arg\max}\{u(y_t-k_{t+1})+(\alpha-\beta)u(f(k_{t+1})-\kappa(f(k_{t+1})))+\beta U(f(k_{t+1}),\kappa(\cdot))\} \tag{7}$$

の条件を満たすものとして表わすことができる。但し，$U(y,\kappa(\cdot))$は

$$\begin{aligned}U(y_t,\kappa(\cdot))&=u(y_t-\kappa(y_t))\\&\quad+(\alpha-\beta)u(f(\kappa(y_t))-\kappa(f(\kappa(y_t))))+U(f(\kappa(y_t)),\kappa(\cdot))\end{aligned}$$

を満たす関数である。

政府が(7)を満たすような投資関数を各世代の選択ルールとして提示し，各世代がそれに合意する場合，τ 世代（$\tau\geq t$）の最適化条件は，

$$u'(c_{\tau})/u'(c_{\tau+1})=\left[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa'\right]f'(k_{\tau+1}),\quad \tau\geq t \tag{8}$$

となる。各世代とも(8)にしたがった消費プランをとるとき，各世代の選択に矛盾は生じないので，(8)は時間整合な消費プランの条件となる。このとき，

各世代（$\tau \geq t$）は，投資関数$k_\tau = \kappa(y_\tau)$として表わされる選択ルールにしたがって最適選択をとるので，以下では，(8)を満たす消費プランを「選択ルールにしたがった消費プラン」と呼ぶことにする。

それでは，各世代の自己最適による消費プラン$\left\{c_\tau{}^*\right\}_{\tau=t}^{\infty}$（式(5)を満たす消費プラン）と選択ルールにしたがった消費プラン$\left\{c_\tau{}^{**}\right\}_{\tau=t}^{\infty}$（式(8)を満たす消費プラン）ではどちらが$t$世代にとって望ましいか考えてみたい。$t$世代にとっては，所与の所得の下で，より高い効用を得られる消費プランの方が望ましいはずである。そこで，次の節では，２つの消費プランから生じる効用を表わしてみたいと思う。

３．２つの消費プラン

ここでは，２つの消費プランの特徴づけをおこない，それをもとに，２つの消費プランから生じる効用を示してみたい。

ここで考えられている２つの消費プランでは，それぞれ，最適条件が異なる。このため，それぞれの定常状態は異なる。では，それぞれの消費プランの定常状態を示してみよう。

各世代の自己最適による消費プラン$\left\{c_\tau{}^*\right\}_{\tau=t}^{\infty}$は，(5)を満たすことから，消費が定常になったとき（$c_\tau = c_{\tau+1} = c^*$），定常資本水準は，

$$\alpha f'(k^*) = 1 \tag{9}$$

を満たすk^*である。このとき，定常消費水準c^*は，(3)と(4)より，

$$c^* = f(k^*) - k^*$$

と表わすことができる。

一方，選択ルールにしたがった消費プラン$\left\{c_\tau{}^{**}\right\}_{\tau=t}^{\infty}$は，(8)を満たすことから，消費が定常になったとき，定常資本水準は，

$$\left[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa'\right]f'(k^{**})=1 \tag{10}$$

を満たすk^{**}である。このとき，定常消費水準c^{**}は，(3)と(4)より，

$$c^{**}=f(k^{**})-k^{**}$$

と表わすことができる。

以上より，各世代の自己最適よる消費プランと選択ルールにしたがった消費プランの定常状態における資本-消費の組は，それぞれ，図1の（k^*，c^*）と（k^{**}，c^{**}）のように表わされる。

2つの消費プランを比較する場合，一方を定常状態に固定しておくと，計算の手間を省くことができる。また，選択ルールにしたがった消費プランがより高い効用を生む可能性を示すことを目的としていることから，本論文では，敢えて一般的に消費プランを特徴づけした後，効用を計測するという労力を省く。その代わりに，2つの消費プランとも，初期資本がk^*からはじまるものと仮定する。(5)を満たす消費プランは，初期時点より，定常状態（k^*，c^*）にとどまる。一方，(8)を満たす消費プランは，$\overline{c}=f(k^*)-\kappa(f(k^*))$とおくと，初期状態（$k^*$，$\overline{c}$）からはじまり定常状態（$k^{**}$，$c^{**}$）に収束するような経路をとる。(図1参照)

2つの消費プランの効用を計算する。(5)を満たす消費プラン$\left\{c_\tau{}^{*}\right\}_{\tau=t}^{\infty}$は，初期時点より定常状態（$c_\tau=c^*$，$\tau\geq t$）にとどまりつづけるので，このときの効用水準$U^*$は，

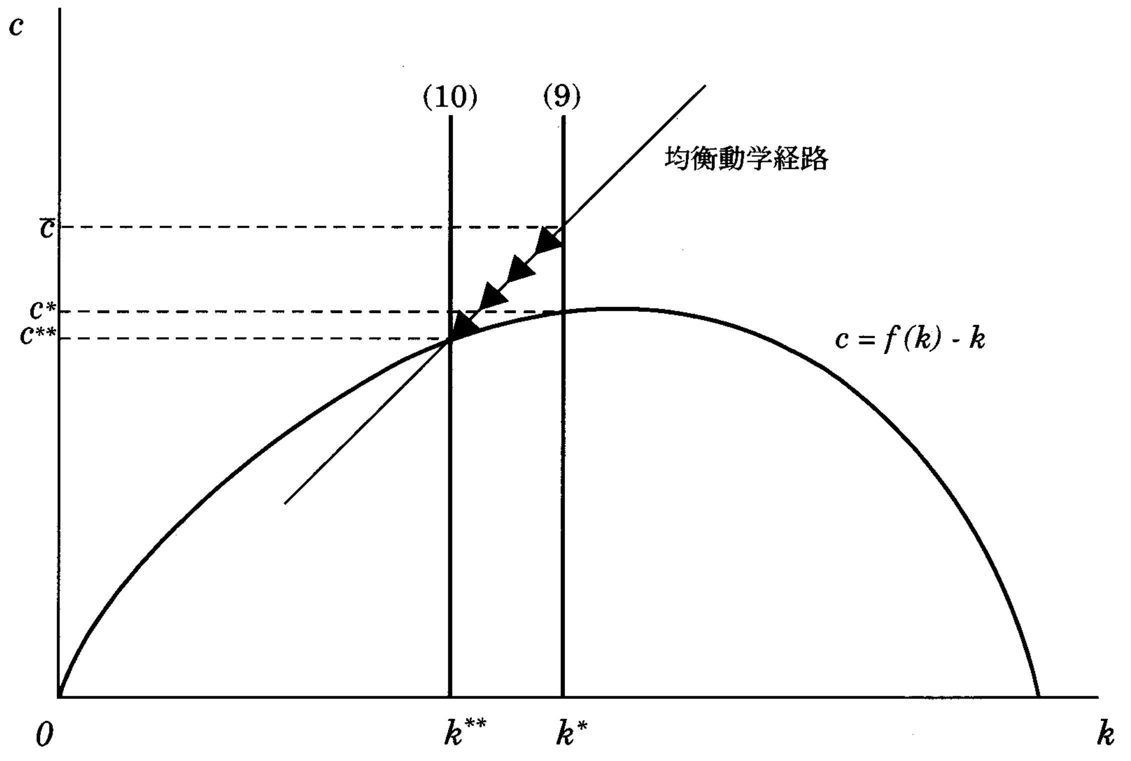

図1

$$U^*=u(c^*)+\frac{\alpha}{1-\beta}u(c^*)$$

となる。一方，(8)を満たす消費プラン$\{c_\tau{}^{**}\}_{\tau=t}^{\infty}$は，初期の消費水準，$\overline{c}$（$>c^*$）から定常状態$c^{**}$に収束するまでの動学経路をとる。このときの効用水準U^{**}は，

$$U^{**}=u(\overline{c})+\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{\ i}u(c_{t+1+i}^{**}) \tag{11}$$

となる。

選択ルールにしたがった消費プランが各世代に選択される理由を正当化するためには，$U^{**}>U^*$となる可能性があることを示さなければならない。もしそうであれば，各世代とも，所与の所得において，(8)のような時間整合な

消費プランをとるほうが望ましくなるからである。

比較のための準備として次のようなことを考える。図１においてみられるように (k^{**}, c^{**}) に収束する均衡動学経路は，初期の消費水準 c_0 が，$c_0 > c^{**}$ のとき，c^{**} よりも高い消費水準から，$c_0 < c^{**}$ のとき，c^{**} よりも低い消費水準から，それぞれ定常状態の消費水準 c^{**} に収束することがわかる。[4] このとき，消費プランは

$$c_t^{**} = \bar{c} > c^{**},\ c_\tau^{**} \geq c^{**},\quad \tau \geq t+1$$

かつ

$$\lim_{\tau \to \infty} c_\tau^{**} = c^{**}$$

を満たす。それゆえ，$u' > 0$ より，

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{\,i} u(c_{t+1+i}^{**}) \geq \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{\,i} u(c^{**}) = \frac{\alpha}{1-\beta} u(c^{**}) \tag{12}$$

が成立する。

２つの消費プランにより生じる効用を比較するとき，

$$u(\bar{c}) + \frac{\alpha}{1-\beta} u(c^{**}) > u(c^{*}) + \frac{\alpha}{1-\beta} u(c^{*}) \tag{13}$$

であれば，(12)より，$U^{**} > U^{*}$ であるといえる。そこで，(13)を満足するような可能性を調べることにする。このためには，関数やパラメータを特定化して調べる必要がある。

4　式(7)を満たす選択ルール（投資関数）がただ１つに定まる場合，定常状態に収束する均衡動学経路はただ１つに定まる。このような場合，定常状態は鞍点（saddle point）となることがよく知られている。(Barro and Sala-i-Martin (1995))

4．２つの消費プランの比較 ―― 例題を用いた分析

第３節で議論した通り，(13)が成立すれば，各世代とも，所与の所得のもとでは，時間整合な消費プランの方を望ましいと認める。この節では，効用関数，生産関数を特定化した例題を用いて，どのような場合に ―― どのようなパラメータ間の関係が成立するときに ―― 時間整合な消費プランが望ましくなるかを分析する。

効用関数，生産関数をそれぞれ

$$u(c) = \ln c \tag{15}$$

$$f(k) = Ak^{\sigma},\ A>0,\ 0<\sigma<1 \tag{16}$$

と特定化する。このとき，(13)を書き換えると，

$$\ln \bar{c}\,(c^{**})^{\frac{\alpha}{1-\beta}} < \ln\,(c^{*})^{1+\frac{\alpha}{1-\beta}} \tag{13'}$$

となる。以下では，この(13')が示す条件 ―― 所与の所得のもとで，各世代にとって，(8)を満たすプランの方が(5)を満たすプランよりも望ましくなる条件 ―― が成立する場合を考えよう。

まず，消費水準 c^{*}，c^{**}，$\bar{c}$ の値を求める。そのためには，(7)を満たす関数を特定する必要がある。Fujiu (2000) は，子供が親に対して利他的であるような設定のモデルにおいて，効用関数，生産関数をそれぞれ(15)，(16)のように特定化した例題を挙げ，そのとき，政策関数 ―― ここでいう $k_{\tau+1}=\kappa(y_{\tau})$，$\tau \geq t+1$ ―― が線形であれば，時間整合な解になることを示している。ここでも，同様に考え，まず，関数 $\kappa(y_t)$が，

$$\kappa(y_\tau)=\kappa y_\tau,\quad \tau\geq t+1$$

のような線形構造をとることを仮定する。これをもとに(7)を満たす時間整合な解を求める。上記の仮定と $c_t=y_t-k_{t+1}$，$c_{t+1}=f(k_{t+1})-\kappa f(k_{t+1})$ を(8)に適用し，かつ整理すると，

$$k_{t+1}=\frac{[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\sigma}{(1-\kappa)+[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\sigma}y_t$$

を得る。これが時間整合な解であるためには，$k_{t+1}=\kappa y_t$となる必要があり，つまり，

$$k=\frac{[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\sigma}{(1-\kappa)+[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\sigma}$$

が成立する必要がある。したがって，関数は，この等式を満たす[5]

$$\kappa=\frac{\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}\tag{17}$$

を係数にもつ線形関数

$$\kappa(y_t)=\frac{\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}y_t$$

として求められる。

定常状態における資本水準は，$\sigma A\sigma(k^*)^{\sigma-1}=1$より，

$$k^*=(\alpha\sigma A)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

であり，また，$[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]A\sigma(k^{**})^{\sigma-1}=1$より，

$$k^{**}=\{A\sigma[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\}^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

である。このとき，２つの消費プランにおけるそれぞれの定常状態の消費水準は$c^{*}=A(k^{*})^{\sigma}-k^{*}$，$c^{**}=A(k^{**})^{\sigma}-k^{**}$より，

$$c^{*}=A^{\frac{1}{1-\sigma}}(\alpha\sigma)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1-\alpha\sigma) \tag{18}$$

$$c^{**}=A^{\frac{1}{1-\sigma}}\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \tag{19}$$

と求められる。さらに，$\overline{\mathrm{c}}$ の値は，時間整合な解なので，

$$\overline{\mathrm{c}}=f(k^{*})-\kappa f(k^{*})=A(1-\kappa)(k^{*})^{\sigma}=A^{\frac{1}{1-\sigma}}(\alpha\sigma)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1-\kappa) \tag{20}$$

と求められる。

次に，(13')を満たす条件を分析してみよう。(13')が成立するためには，

5　この等式を整理すると，

$$(1-\kappa)\{\kappa-[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]\sigma\}=0$$

となる。仮定より，$0<\kappa<1$なので，$\kappa\neq1$である。したがって，

$$\kappa=\frac{\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}$$

である。$0<\beta\sigma<1$なので，上記の κ に関しては $0<\kappa<1$が成立する。

$$\bar{c}\ (c^{**})^{\frac{\alpha}{1-\beta}} > (c^{**})^{1+\frac{\alpha}{1-\beta}} \tag{21}$$

が成立すればよい。(21)に(18)，(19)，(20)を代入し，整理すると，[6]

$$(1-\kappa)[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}} > (1-\alpha\sigma)^{1+\frac{\alpha(2-\sigma)}{(1-\beta)(1-\sigma)}}[\alpha(1-\alpha\sigma)]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}} \tag{22}$$

を得る。このため，(22)が成立するとき，各世代にとって(8)を満たす消費プラ
ンが望ましい選択になる。以下の命題は，(22)より導かれるものである。

命題

効用関数と生産関数をそれぞれ(15),(16)のように仮定する。経済が初期資本 $k^* = \{k: \alpha f'(k)=1\}$ からはじまるとき，$0<\sigma<1/2$ ならば，(8)を満たす消費プランは(5)を満たす消費プランより望ましい。

証明）補題B参照

この命題は，各世代の自己最適により実現する消費プランが時間不整合であるとき，産出に対する資本の弾力性 σ ―― 資本が１％増加したときに産出が何％増えるかを表わす値 ―― があまり大きくなければ（$0<\sigma<1/2$），各世代は選択ルールにしたがった方がより望ましい（効率的である）と考えることを示した。このことより，われわれは，各世代の自己最適な消費プランが動学的不整合をおこすようなときには，時間整合な消費プランを検討すべき根拠を得た。

6　補論Ａ参照

5．むすび

本論文では，各世代共通の投資関数として表わされる選択ルールにしたがった時間整合な消費プランの方が，各世代の最適選択の結果として生じる時間不整合な消費プランとくらべ，効率的である可能性が高いことを示した。このことにより，時間不整合な資源配分が生じる場合，選択ルールにしたがった時間整合な資源配分を考慮する妥当性が高いことが示された。

また，この結果は，各世代が時間整合性を生む選択ルールを正確に知らない場合でも，政府が（長い間，各世代の行動を見ることで明らかになる）そのような選択ルールを提示することで，各世代ともより厚生を高めることができることを示唆する。最後に，本論文のインプリケーションとして，各世代の最適選択により時間不整合な資源配分が生じる場合，政府が直接資源の再配分をおこなわなくても，単に選択ルールを提示するだけで，各世代の厚生をより高める —— より効率的な資源配分を達成する —— ことができると指摘しておく。

参考文献

Barro, R. J. (1974) "Are Givernment Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy* 82, 1095-1117.

Barro, R. J. (1999) "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model," *Quarterly Journal of Economics* 114, 1125-1152.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1995) *Economic Growth,* McGraw-Hill. (First MIT Press edition 1999. Originally Published by McGraw-Hill, Inc., 1995.)

Fujiu, H. (2000) "Intergenerational Transfers Motivated by Altruism from Children towards Parents: Children's Gifts and Parents' Education Investments," mimeo., Chiba Keizai University.

Hori, H. and S. Kanaya (1989) "Utility Functionals with Nonpateralistic Intergenerational Altruism," *Journal of Economic Theory* 49, 241-265.

Hori, H. (1992) "Utility Functionals with Nonpaternalistic Intergenerational Altruism: The Case Where Altruism Extends to Many Generations," *Journal of Economic Theory* 56, 451-467.

Hori, H. (1997) "Dynamic Allocation in an Altruistic Overlapping Generations Economy," *Journal of Economic Theory* 73, 292-315.

Laibson, D. (1997) "Golden Eggs and Hyperbolic Discounting," *Quarterly Journal of Economics* 112, 443-477.

Phelps, E. S. and R. A. Pollak (1968) "On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth," *Review of Economic Studies* 35, 189-199.

Yano, M. (1984) "The Turnpike of Dynamic General Equilibrium Paths and Its Insensitivity to Initial Conditions," *Journal of Mathematical Economics* 13, 235-254.

藤生　裕 (1999)『後方利他性モデルの研究』, 博士論文, 横浜国立大学.

補論A　——　式(22)の導出

まず，(21)に(18),(19),(20)を代入する。

$$A^{\frac{1}{1-\sigma}}(\alpha\sigma)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1-\kappa)\left(A^{\frac{1}{1-\sigma}}\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\beta}}>\left(A^{\frac{1}{1-\sigma}}(\alpha\sigma)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1-\alpha\sigma)\right)^{1+\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

両辺より共通項を消去すると，

$$(1-\kappa)[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}>\alpha^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}(1-\alpha\sigma)^{1+\frac{\alpha}{1-\beta}} \tag{A1}$$

となる。ここで，(A1)の右辺は，

$$\alpha^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}(1-\alpha\sigma)^{1+\frac{\alpha}{1-\beta}}=[\alpha(1-\alpha\sigma)]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}(1-\alpha\sigma)^{1+\frac{\sigma}{1-\sigma}-\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}$$

$$=(1-\alpha\sigma)^{1+\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}[\alpha(1-\alpha\sigma)]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\beta)(1-\sigma)}}$$

と変形できるので，これを(A1)に代入することで，(22)を得る。

補論B —— 命題の証明

命題の証明のためには，$0<\sigma<1/2$のとき，(22)が成立することを示せばよい。そのため，いくつかの準備をしておく。はじめに，

$$1>1-\kappa>1-\alpha\sigma>0 \tag{B1}$$

であることを示す。(17)より，

$$\kappa=\frac{\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}$$

であり，さらに，仮定より（(2)と(16)より），$0<\beta<\alpha<1$，$0<\sigma<1$であることから，

$$0<\kappa<\alpha\sigma<1 \tag{B2}$$

を得る。それゆえ，(B1)が成立する。

次に，

$$\alpha-(\alpha-\beta)\kappa>\alpha(1-\alpha\sigma)>0 \tag{B3}$$

を示す。(B3)の左辺から右辺を引いた式に，(17)のκの値を代入し，整理すると，$0<\beta<\alpha<1$，$0<\sigma<1$であるので，

$$\begin{aligned}&\alpha-(\alpha-\beta)\kappa-\alpha(1-\alpha\sigma)\\&=\alpha-\frac{(\alpha-\beta)\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}-\alpha(1-\alpha\sigma)\\&=\frac{[1+(\alpha-\beta)\sigma]\alpha^2\sigma(\alpha-\beta)\alpha\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}\end{aligned}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)\alpha^2\sigma+\alpha\beta\sigma}{1+(\alpha-\beta)\sigma}>0$$

を得る。さらに，(B1)より，$\alpha(1-\alpha\sigma)>0$ なので，(B3)が成立する。

それでは，(22)が成立することを示す。(B3)が成立することから，本論文の仮定のもとでは，

$$[\alpha-(\alpha-\beta)\kappa]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\alpha)(1-\sigma)}}>[\alpha(1-\alpha\sigma)]^{\frac{\alpha\sigma}{(1-\alpha)(1-\sigma)}}>0 \tag{B4}$$

が成立する。さらに，$0<\sigma<1/2$ のとき，

$$\left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\left(\frac{2-\sigma}{1-\sigma}\right)+1>1$$

であるので，(B1)より，

$$1-\kappa>(1-\alpha\sigma)^{\frac{\alpha(2-\sigma)}{(1-\beta)(1-\sigma)}}>0 \tag{B5}$$

が成立する。それゆえ，$0<\sigma<1/2$ のとき，(B4)と(B5)より，(22)の関係式を得る。(証明終)

(ふじう　ひろし　本学専任講師)