＜論文＞

流動性需要の下の銀行取引の動学モデル

青　木　　慎

【要旨】

本論は、預金者の流動性需要のある銀行取引モデルについて動学分析を行う。この動学分析では、標準的な均衡点を適切に選び、その上で均衡点が安定か不安定かを示す。ディストレス（銀行の破綻や財務危機状態）の負の外部性が人々の経済厚生を強く影響する経済では、社会計画者は一意の最適経路を選択することを本モデルの動学分析を通じて示す。

【キーワード】

流動性需要、銀行取付け、誘因効率性（誘因適合性）、流動性リスク、ディストレスの負の外部性

1．はじめに

本論は、預金者の流動性需要のある銀行取引モデルについて動学分析を行う。この動学分析は、標準的な均衡点を適切に選び、その上で均衡点が安定か不安定かを示す。

当初、流動性需要を扱った銀行取引の動学モデルは、世代重複モデルのフレームワークを用いた長期分析であった。[1] その後、１つの時間区分内のタイムライン上で各主体の行動手順を記述するという解釈で、短期的な動学モデルが作られるようになった。[2]

Diamond and Dybvig（1983）によると、金融仲介機関は、個々の流動性ショックに対して消費者に保険機能を提供する。個人投資家は、情報の取得や

---

[1] Ennis and Keister (2003) を参照。

[2] Gertler and Kiyotaki (2015)、Gale, Gamba and Lucchetta (2018) を参照。

処理、および、証券取引に費用が掛かりすぎるために、すべての金融市場の中で直接取引することが不可能である。故に、金融市場は、預金や投資信託などを運用する金融仲介機関（つまり、間接的に預金者）が貸し手として金融市場に投資することでリスクを共有することを可能にする。金融仲介機関は、市場にアクセスできない投資家に代わって銀行への既存の請求額をパッケージ化することで、リスク共有サービスを提供すると共に、そうした請求額について市場で取引ができる。こうしたモデルを構築した一般均衡の枠組みは、金融システムによる流動性供給の規範的な分析を可能にした。[3]

本論のモデルのフレームワークは、Gale, Gamba and Lucchetta (2018)（以後、GGLと記す）にある。ただし、本論のモデルでは、GGLとは異なる点が３つある。第１に、本論では離散時間モデルではなく、連続時間モデルである。第２に、生産性は確率変数であるが、本論のモデルでは定常的であり、技術進歩を考慮しない。その意味で本モデルは短期分析に焦点を当てている。第３に、本モデルでは資産価格、特に、消費財で測った資本財の価格は固定している。これらの要素から、連続時間のフレームワークを使って、均衡点が決定理論に基づき動学的安定性／不安定性を調べることを容易にする。

本論の構成は、以下の通りである。第２節は、モデルのフレームワークを説明する。第３節は、ディストレスの負の外部性を考慮した計画者の問題を最適化し、その上で均衡点の動学的安定／不安定を明らかにする。第４節は、結びである。

２．基本モデル

財は、腐りやすい消費財と耐久性のある資本財の２種類がある。[4] 消費財は、資本財の生産のための唯一の投入物として使用される。また、資本財は、消費

[3] Allen and Gale (2017) を参照。この論文では、流動性供給ついて理論的な視点から多角的な視点まで幅広く議論され、それと共に流動性規制の基本的根拠について広義的な一致がないことを述べている。

[4] Allen, Carletti and Gale (2014) では、消費財と貨幣の２種類を扱い、静学的均衡の存在について証明している。

財の生産のための唯一の投入物として使用される。

経済は、消費者、銀行家、資本財の生産者で構成される。消費者は資本財の最初の所有者であり、預金契約を通じて銀行家に販売する。消費者は、生涯消費に資金を供給するために預金を運用し、資本財を生産する企業を所有するものとする。

次に、銀行家は、消費財を生産するものとする。銀行家は、預金（負債）を発行することで、資本財の購入に充てる。資本蓄積に対して収穫一定と完全競争市場の 2 つの仮定をおく。この仮定の下で、銀行家が預金契約の市場価値を最大化すると共に、超過利潤が生じない。

銀行家は、預金者からの預金を 2 つの資産（流動資産と非流動資産）に配分する。各t時点は、午前の部と午後の部の 2 つに区分される。預金者は前時点で新しい預金契約する際､銀行から先の 2 つの資産配分が公開される。そして、t時点の午前の部に、預金者が引き出し可能な預金額は流動資産の収益（言い換えると、元本と利子）を上限とする。t時点の午後の部では、繰り越された流動資産の収益と非流動資産の収益が預金者から引き出される。非流動資産の収益は、株主配当に加え、（蓄積と投入が可能な）資本財によって構成される。

各銀行は、デフォルトの可能性をもたらす収益ショックθ_tの影響を受ける。銀行が預金の要求払いを満たす十分な資金を持っていない場合、銀行は清算を余儀なくされ、資産（資本財）の売却から債務を清算する。

最後に、資本財の生産者は、新古典派的生産関数を使用して資本財を生産する。資本財の生産は、消費者が供給する消費財を投入して瞬時に行われる。投入物として資本財を必要とせず、資本財を生産する企業を消費者が所有することから、資本財の生産者は操業のための資金を調達する必要がない。資本財の生産者は、現在利潤を最大化するために消費財の投入量と新規の資本財の生産量を決定する。その利潤は、すぐに所有者である消費者に分配される。

2.1　市場構造

先にも説明したが、各t時点は、午前の部と午後の部の 2 つに区分される。そのタイムラインは以下の通りである。

t時点の午前の部：

①総生産性ショック、銀行家の特異なショック、消費者の消費の時間選好が実現される。

②銀行家の流動資産が実現される。

③消費者は、銀行から預金を早期に引き出し、消費する。

④消費に使用されなかった預金は午後に繰り越される。

t時点の午後の部：

①支払い能力のある銀行は非流動資産に収益を支払う。

②破綻した銀行は清算され、債務を決済する。

③消費者は、銀行から預金を遅延して引き出し、その一部を消費する。

④資本財の生産者が新しい資本財が生産され、銀行に販売される。

⑤銀行は、新しい資本財の購入に資金を準備し、バランスシート構造を最適化して流動資産と非流動資産を配分と新しい預金契約を発行する。

⑥消費者は、新しい預金契約を購入する。

2.2　消費者

消費者は、前時点で新しい預金契約をするとき、その選好が同質になる。次の時点の期首に、消費者は早期消費か遅延消費かどちらかのタイプを認識する。消費の時間選好を除けば、消費者は同質で無限視野をもち、全体の人口を 1 とする。消費者は、0時点前にK_0単位の資本財を保有し、預金契約と引き換えに銀行家に販売する。0時点前の消費または生産を考慮しないものとする。これは、消費者が資本財を販売し、銀行家が資本財を購入して初期のバランスシート構造、つまり、資本財と引き換えに発行する預金契約（流動資産と非流動資産の各金額）を決定する機会としてのみ機

能する。

表記について、Δを極めて小さい正の数値とする。$t-\Delta$時点の午後の部の新しい預金契約のとき、消費者は自身の時間選好に確信を持てない。そして、t時点の期首になると、各消費者は自身の時間選好が明らかになる。確率βで消費者は早期消費を選好し、確率$1-\beta$で消費者は遅延消費を選好する。大数の法則により、βは一定で安定しているものとする。

消費者の瞬間的効用関数は

$$u(C_{i,t})=\frac{C_{i,t}^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \qquad \alpha\in[0,1],\ i\in\{m,a\}$$

とする。$C_{i,t}$は消費であり、また、$i=m$は午前の部、$i=a$は午後の部を表す。

消費者の無限視野の効用関数は次のように表すものとする。

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\beta u(C_{m,t})+(1-\beta)u(C_{a,t})-\xi z_t K_t\right]dt \qquad (1)$$

ここで$\xi\geq 0$であり、$\rho>0$は時間選好率、z_tは午前の部の預金の額面価値（または、レバレッジ）、K_tは資本ストックである。(1) 式の第2項は、銀行部門の破綻、または、財務危機状態による負の外部性である。

2.3　銀行家

初めに、銀行家も消費者と同様に全体の人口を1とする。各銀行家は、消費財を生産する技術を有しており、個別の生産関数は

$$\theta_t e_t K_t^{\omega} L_t^{1-\omega} \qquad \omega\in(0,1)$$

と仮定する。θ_tは銀行家個人に与える特異な収益ショック、L_tは労働である。また、e_tは正の外部性、つまり知識の蓄積によって経済の他の活動に影響を与える偶発的な副産物である。[5]

先の個別の生産関数に 2 つの仮定をおく。1 つは、消費者である各労働者が 1 つの銀行に雇用され、1 単位の労働（$L_t = 1$）を供給し、午後の部に一定の実質賃金を報酬として受け取るものとする。次に、資本の蓄積はその経済の生産全体に関する新しい知識を生み出すものと仮定する。ここで具体的に $e_t = A_t K_t^{1-\omega}$ とする。A_t は総生産性である。この 2 つの仮定を先の個別生産関数に代入すると、

$$\theta_t A_t K_t$$

となり、生産関数は資本蓄積に対して収穫一定になる。

個別の生産関数に関して、2 つのショックの設定について述べる。各個人のショックを $\theta_{i,t}$ と定義した上で、$\theta_{i,t}$ は確率変数であり、各個人と時間を通じて独立同分布（i.i.d.）であると仮定する。$F(\theta_t)$ は確率変数 θ_t の累積密度関数（c.d.f.）を表す。$F(\theta_t)$ は連続的であり、$[0, Z]$ の増加関数であり、$F(0) = 0$ と $F(Z) = 1$ であると仮定する。任意の θ_t について、ショック $\theta_{i,t} < \theta_t$ を受ける銀行の割合は $F(\theta_t)$ である。特に、これは大数の法則がすべての t を通じて満たされることを意味する。銀行家の全体的行動に関心があるため、代表的な銀行家に対する生産性ショックとして添え字 i を削除し、θ_t として表す。

総生産性のショック A_t は、一般的には定常推移確率を通じて有限事象のうちで要素から要素へ変化する。しかし、本モデルでは、A_t は確率変数であるが、不連続な変化についてほとんど発生しないものとする。従って、当面は定数と考える。

銀行家は、新しい預金契約を発行することにより、資本財の購入に資金を準備する。$t - \Delta$ 時点の午後に購入された 1 単位の預金は、t 時点で額面価値が $z_t K_t$ であり、各銀行は $t - \Delta$ 時点の期末に K_t 単位の資本財を保有する。

---

[5] Jones (1998) を参照。

預金を発行することで、銀行は債務不履行のリスクを伴う。t時点の午前の部の最初に、銀行は$\theta_t A_t K_t$単位の財を生産する。銀行は額面価値が$\theta_t A_t K_t$以下の流動資産を発行した場合、預金を全額償還することができる。それ以外の場合は、デフォルトになる。債務不履行が発生した場合、銀行は破産に関連する追加費用を負担する。これらの費用は、銀行がデフォルトしたとき$\delta \in (0,1)$の割合の生産量を失うものとする。

2.4　資本財の生産者

資本財の生産関数は、規模に関して収穫逓減する。資本財の生産者は、$I_t \geq 0$単位の消費財を投入すると、$\varphi(I_t)$単位の資本財が瞬時に生産する。$\varphi(I_t)$の特性について、$\varphi(I_t)$は実数値で、$I_t > 0$に対して$\varphi'(I_t) > 0$、かつ、$\varphi''(I_t) < 0$であり、稲田条件$\lim_{I_t \to 0+} \varphi'(I_t) = 0$である。

資本財の生産は瞬時に行われるため、生産者が資金を必要としない。資本財の生産者が I_t単位の消費財を投入し、$\varphi(I_t)$単位の資本財を生産する場合、その収入は$\upsilon_t \varphi(I_t)$である。ここで、υ_tは消費財で測った資本財の価格であり、その利潤関数は$\upsilon_t \varphi(I_t) - I_t$である。ここで$\upsilon_t = \upsilon$で資本財の価格を一定に仮定する。生産者は、各時点の利潤を最大化するために、I_tを決定する。稲田条件によって、各時点と状態において$I_t > 0$が保証されるため、I_tに関して１階条件を解くと、

$$\upsilon \varphi'(I_t) = 1 \tag{2}$$

を満たすように、生産者は投資I_tの適切な量を決定することができる。最後に、利潤はすぐに企業の所有者（消費者）に分配される。

2.5　資源制約

資本財市場の完全競争の仮定の下で、代表的な銀行家は発行する預金契約（つまり、流動資産と非流動資産）の市場価値を最大化する。銀行家が決定する唯一の変数はバランスシート構造（$z_t K_t$）であり、つまり、デフォルトのリスクと各資産の収益区分を決定することである。このとき、銀行家の超過利潤がゼロである。銀行が多期間にわたり存続する可能性があるが、銀行家は最適なバランスシート構造を選択するとき毎度1時点だけを考えればよい。バランスシート構造が各時点の期末に変更できるため、$t-\Delta$時点の午後の部に銀行家がバランスシート構造を決定した効果は、t時点の午後の一部までしか影響しない。そして、発行される預金契約の市場価値は、t時点の各資産収益と、t時点の期末の減価償却を除いた資本財のストックのみ影響することになる。

K_t単位の資本財を保有する銀行家によって決定されるバランスシート構造は、$t-\Delta$時点の午後の部に発行される流動資産の額面価値$z_t K_t$によって決定される。t時点の午前の部に実現された収益$\theta_t A_t K_t$が$z_t K_t$未満の場合にのみ、銀行はデフォルトになる。銀行の総収益は、t時点の午前の部の流動資産の価値、t時点の午後の部の非流動資産の価値、および、t時点末の減価償却を除いた資本財の残存価値の3つで構成される。資本の減価償却率を$\gamma \in (0,1)$として定義すると、減価償却される資本ストックγK_tは銀行家の決定問題に影響しない。

ここで銀行は資本蓄積に関して収穫一定を条件にするから、1単位の資本財と額面の単位価値z_tの流動資産を使用する（つまり、資本総量でなく資本単位で計算する）銀行を考えることにする。預金者はすべての銀行に預金契約を分散して行い、それにより特異なリスクを排除するものとする。ただし、デフォルトによる損失は依然として発生する。総生産性がA_tのときの特異なショック$\theta_t < z_t / A_t$を持つ流動資産は、$(1-\delta)\theta_t A_t$の

価値がある。反対に、A_tのときの特異なショック$\theta_t \geq z_t / A_t$を持つ流動資産はz_tの価値がある。代表的銀行の流動資産の期待価値は、多様な流動資産ポートフォリオの現実収益に等しく、A_tのとき

$$\lambda_t = A_t \int_0^{\frac{z_t}{A_t}} (1-\delta)\theta_t dF + z_t \left(1 - F\left(\frac{z_t}{A_t}\right)\right) \tag{3}$$

になる。ここで は、すべての銀行の多様な流動資産ポートフォリオ１単位当たり収益を表している。反対に、資本の減価償却前の非流動資産の単位当たり収益は、A_tのとき

$$A_t \int_{\frac{z_t}{A_t}}^{Z} \left(\theta_t - \frac{z_t}{A_t}\right) dF$$

になる。

再び単位計算から総量計算に戻して、これまでの流動資産の収益と非流動資産の収益の和から、消費財の総生産関数は

$$Y_t = A_t K_t \left(\int_0^Z \theta_t dF - \int_0^{\frac{z_t}{A_t}} \delta\theta_t dF \right) \tag{4}$$

であることが言える。

t時点の午前の部では、代表的な消費者は早期消費を確保する必要がある。t時点の午前の部の消費者の予算制約は、

$$\beta C_{m,t} \leq \lambda_t K_t \tag{5}$$

になる。仮に予算制約 (5) が不等号である場合、銀行取付けが生じると考えてよい。遅延消費を選好する消費者の中で早期に預金を引き出す割合を$\varepsilon_t > 0$と定義すると、銀行取付けがある場合、次式が成立する。

$$\beta C_{m,t} + \varepsilon_t (1-\beta) C_{a,t} = \lambda_t K_t$$

t時点の午後の部において、経済全体の資源制約は

$$Y_t = \beta C_{m,t} + (1-\beta) C_{a,t} + I_t \tag{6}$$

である。総消費を $C_t = \beta C_{m,t} + (1-\beta) C_{a,t}$ と定義し、(4) の消費財の生産量を代入することで、(6) 式はマクロ経済学で見慣れている財市場の均衡条件であることが分かる。最後に資本財の蓄積方程式は、

$$\dot{K}_t = \varphi(I_t) - \gamma K_t \tag{7}$$

である。$\gamma > 0$ は資本の減価償却率である。

3．計画者の最適動学問題

本節では、計画者の最適問題を考える。計画者は、制約条件 (2)－(7) の下で消費者の無限視野の効用関数 (1) を最大化する。このとき、制御変数は $\{C_{m,t}, C_{a,t}, I_t, z_t\}$ であり、状態変数は $\{A_t, K_t\}$ である。

モデルをより簡単化するために、2 つの関数について $F(\theta_t) = (\theta_t / Z)^m$、$\varphi(I_t) = I_t^{\eta}$、$\eta \in (0,1)$、$m > 0$ と具体化する。これを使用すると、(2)－(4) 式は次のようになる。ただし、$Z = 1$ とする。

$$\upsilon \eta I_t^{\eta-1} = 1 \tag{8}$$

$$\lambda_t = z_t \left[1 - \left(\frac{z_t}{A_t} \right)^m \left(\frac{1+\delta m}{1+m} \right) \right] > 0 \tag{9}$$

$$Y_t = A_t K_t \left(\frac{m}{1+m} \right) \left[1 - \delta \left(\frac{z_t}{A_t} \right)^{1+m} \right] \tag{10}$$

(4) と (6) 式を使って (7) 式に代入することで第 2 の制約式は次のようになる。

$$\dot{K}_t = (Y_t - \beta C_{m,t} - (1-\beta) C_{a,t})^{\eta} - \gamma K_t \tag{11}$$

ちなみに、第 1 制約式は (5) 式である。

(1)、(5)、(11) 式を使って経常価値のハミルトニアンを作る。

$$H=\beta\left(\frac{C_{m,t}^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)+(1-\beta)\left(\frac{C_{a,t}^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)-\xi z_t K_t+\ell_{1,t}(\lambda_t K_t-\beta C_{m,t})$$
$$+\ell_{2,t}[(Y_t-\beta C_{m,t}-(1-\beta)C_{a,t})^{\eta}-\gamma K_t]$$

$\ell_{1,t}$ と $\ell_{2,t}$ はラグランジュ乗数である。ここで注意することは、$\ell_{1,t}$ の扱いである。$\ell_{1,t}$ は定数値であり、状態に応じて変化すると仮定する。制約条件 (5) に拘束力がない場合、$\ell_{1,t}=0$ になり銀行取付けが発生していることになる。反対に、制約条件 (5) に拘束力がある場合、$\ell_{1,t}=\ell_1>0$ となり (5) 式は等号である。[6]

計画者の最適問題の 1 階条件は、(8)－(10) 式を考慮することで次のように得られる。

$$C_{m,t}^{-\alpha}=\ell_{1,t}+\upsilon^{-1}\ell_{2,t} \tag{12}$$

$$C_{a,t}^{-\alpha}=\upsilon^{-1}\ell_{2,t} \tag{13}$$

$$\left(\frac{z_t}{A_t}\right)^m=\frac{\ell_{1,t}-\xi}{\ell_{1,t}(1+\delta m)+\delta m\upsilon^{-1}\ell_{2,t}} \tag{14}$$

$$\dot{\ell}_{2,t}=\ell_{1,t}\lambda_t-\xi z_t+\ell_{2,t}\left[\rho-\upsilon^{-1}\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)-\gamma\right]=f_1 \tag{15}$$

相補性条件は

$$(C_{m,t}^{-\alpha}-C_{a,t}^{-\alpha})(\lambda_t K_t-\beta C_{m,t})=0 \tag{16}$$

である。最後に、横断性条件は

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\ell_{2,t}\ K_t=0 \tag{17}$$

である。

[6] Allen and Gale (1998) を参照。

3.1　均　衡

初めに、このモデルにおいて銀行取付けは実行性がないことを示す。仮に銀行取付けが発生した場合、$\lambda_t K_t > \beta C_{m,t}$ であり、遅延消費を選好する一部の消費者が午前の部で預金を引き出すことになる。相補性条件 (16) を満たすためには、$C_{m,t} = C_{a,t}$ となり、$\ell_{1,t} = 0$ でなければならない。$A_t > 0$ の下では、(14) 式よりレバレッジ $z_t < 0$ になり実現不可能である。また、負の外部性がない（$\xi = 0$）場合であっても、$z_t = 0$ となり、銀行家はすべての預金を非流動資産に投じるため、早期消費が $C_{m,t} = 0$ であり内点解にならない。こうしたことから、以下では仮定より $\ell_{1,t} = \ell_1 > 0$ として $\ell_{1,t}$ を定数値として考える。つまり、常に $C_{m,t} < C_{a,t}$ が成立し、誘因効率性（誘因適合性）は満たされる。また、$\ell_1 > \xi$ であり、負の外部性のサイズには上限があると仮定する。

均衡では、$\dot{\ell}_{2,t} = \dot{K}_t = 0$ であり、横断性条件 (17) を満たす。また、実行可能な均衡変数は、$\{\overline{C}_m, \overline{C}_a, \overline{I}, \overline{z}, \overline{K}, \overline{Y}, \overline{\lambda}, \overline{\ell}_2\}$ で表すものとする。

(8) 式を I_t について解き、(7) 式に代入することで、

$$\dot{K}_t = (\upsilon\eta)^{1/(1-\eta)} - \gamma K_t = f_2 \tag{18}$$

となり、資本蓄積の方程式は、時間を通じて K_t の水準によって推移する。

$\dot{K}_t = 0$ のとき、

$$\overline{K} = \gamma^{-1}(\upsilon\eta)^{1/(1-\eta)} > 0$$

$$\overline{I} = (\upsilon\eta)^{1/(1-\eta)}$$

である。

$\dot{\ell}_{2,t} = 0$ のとき、$\ell_{1,t} = \ell_1 > 0$ の仮定と(9)、(10)、(14)、(15)式から均衡条件は

$$\ell_1 \lambda(\overline{\ell}_2) + \overline{\ell}_2 \left[\rho - \upsilon^{-1}\chi(\overline{\ell}_2) - \gamma \right] = \xi z(\overline{\ell}_2) \tag{19}$$

$$\overline{z} = z(\overline{\ell}_2) = A\left(\frac{\ell_1 - \xi}{\ell_1(1+\delta m) + \delta m \upsilon^{-1}\overline{\ell}_2}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda(\overline{\ell}_2) = z(\overline{\ell}_2)\left[1 - \left(\frac{z(\overline{\ell}_2)}{A}\right)^m \left(\frac{1+\delta m}{1+m}\right)\right] > 0$$

$$\chi(\overline{\ell}_2) = \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = A\left(\frac{m}{1+m}\right)\left[1 - \delta\left(\frac{z(\overline{\ell}_2)}{A}\right)^{1+m}\right]$$

である。負の外部性ξが大きくなると、均衡レバレッジ$\overline{z}$は低い水準になる。つまり、銀行は流動資産の収益を低く抑えて、非流動資産の収益を確保するように行動することになる。

(19) 式より$\overline{\ell}_2$の均衡値は、複数個存在するものと考えられる。$\overline{\ell}_2 > 0$の均衡値のみを考え、標準的な均衡点$(\overline{\ell}_2, \overline{K})$を選び、その均衡点が小域的に安定か不安定かを分析する。

3.2　動学分析

本項では、(15) と (18) から構成される動学システムの標準的な均衡点における小域的な安定／不安定について調べる。$\overline{\ell}_2 > 0$となる標準的な均衡点が選び、その均衡点の下で (15) と (18)の動学システムのヤコビ行列は以下のようになる。

$$J = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$f_{11} = \ell_1 \underset{(?)}{\lambda'(\overline{\ell}_2)} - \xi \underset{(-)}{z'(\overline{\ell}_2)} + \rho - \chi(\overline{\ell}_2) - \gamma - \overline{\ell}_2 \underset{(+)}{\chi'(\overline{\ell}_2)} \tag{21}$$

$$\lambda'(\overline{\ell}_2) = z'(\overline{\ell}_2)\left[1-(1+\delta m)\left(\frac{z(\overline{\ell}_2)}{A}\right)^m\right]$$

$$\chi'(\overline{\ell}_2) = -z'(\overline{\ell}_2)m\delta\left(\frac{z(\overline{\ell}_2)}{A}\right)^m$$

(20)式のヤコビ行列より $traceJ = f_{11} + f_{22}$、$detJ = f_{11}f_{22}$ 、である。

特性方程式 $\Gamma(\mu) = |\mu I - J|$ の 2 つの根をそれぞれ μ_1 と μ_2 とする。この定義を用いると $traceJ = \mu_1 + \mu_2$、$detJ = \mu_1\mu_2$、であることが言える。先の 3 つのケースについて、それぞれ次の結果が得られる。

定理.

$\overline{\ell}_2 > 0$ となる標準的な均衡点を選び、$\ell_1 > \xi$ を仮定する。

(1) 消費の減少に対する多様な流動資産ポートフォリオ 1 単位当たり収益の効果 $\lambda'(\overline{\ell}_2)$ が正値で十分に大きく、また、負の外部性の効果 ξ も十分に大きい場合、(15) と (18) の動学システムの標準的な均衡点は、小域的にサドル的安定である。また、その均衡経路は決定性である。

(2) 反対に、消費の減少に対する多様な流動資産ポートフォリオ 1 単位当たり収益の効果 $\lambda'(\overline{\ell}_2)$ が負値であり、また、負の外部性の効果 ξ も十分に小さい場合、(15) と (18) の動学システムの標準的な均衡点は、小域的に安定である。また、その均衡経路は、不決定性である。

証明：

(1) $\lambda'(\overline{\ell})$ が正値で十分に大きく、ξ が十分に大きい場合、(21) 式より $f_{11} > 0$ になる。これにより、$detJ < 0$ であるため、特性方程式 $\Gamma(\mu) = |\mu I - J|$ の 1 つの根は正値であり、もう 1 つの根は負値である。故

に、均衡点は小域的にサドル的安定であることが証明された。また、$\ell_{2,t}$ がジャンプ変数であり、K_t が先決変数であるため、均衡点から外れた均衡経路は、決定性であることが示された。

(2)　反対に、$\lambda'(\overline{\ell})$ が負値で、ξ が十分に小さい場合、(21)式より $f_{11}<0$ になる。これにより $traceJ<0$、$detJ>0$ であるため、特性方程式 $\Gamma(\mu)=|\mu I-J|$ の 2 つの根は負値になる。故に、均衡点は小域的に安定であることが証明された。また、$\ell_{2,t}$ がジャンプ変数であり、K_t が先決変数であるため、均衡点から外れた均衡経路は、不決定性であることが示された。■

仮に標準的な均衡点から離れた場合、$\ell_{2,t}$ はジャンプ変数であるため、瞬時に $\ell_{2,t}=\overline{\ell}_2$ を計画者は選択することになる。

図 1 — (a) は、定理 (1) について、標準的な均衡点が小域的にサドル的安定である典型的な位相図を描いている。$\ell_{2,t}$ がジャンプ変数であるから、K_0 を所与として、均衡経路は矢印の方向に一意に均衡点へ収束していく。

図 1 — (b) は、定理 (2) について、標準的な均衡点が小域的に安定である典型的な位相図を描いている。$\ell_{2,t}$ がジャンプ変数であり、K_t が先決変数であるため、均衡点から外れた均衡経路は、不決定性である。ここで不決定

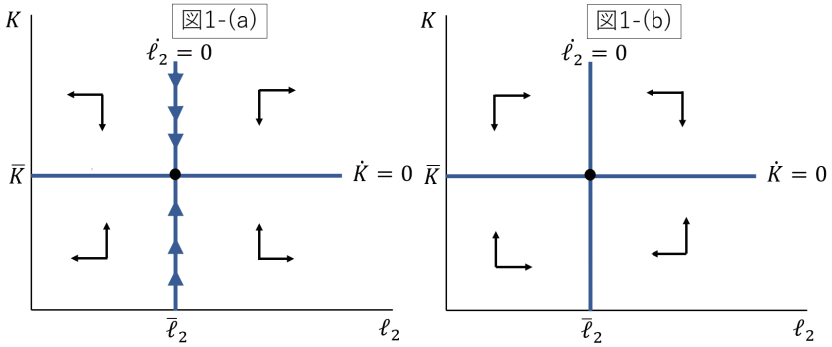

図 1　位 相 図

性とは、無数に最適均衡経路が存在することを意味する。

最後に、資本財の価格が定数ではなく、$\upsilon_t = \upsilon(\ell_{2,t}, K_t)$のような関数を考えることも可能である。(6)式を資本財の需要関数、(8)式を資本財の供給関数として均衡条件を計算すれば、複雑ではあるが資本財の価格関数を暗黙的に導出できる。これにより、$\ell_{2,t}$は動学的に変化するモデルになるが、本論の基本的な結論を変更するものではない。

4．おわりに

本論の成果を述べると、流動性需要のある銀行取引の本モデルでは、消費の減少に対する多様な流動資産ポートフォリオ１単位当たり収益の効果が正値で十分に大きく、また、負の外部性の効果も十分に大きい場合、均衡経路は決定性を持つようになる可能性を示すことができた。１つの解釈として、銀行の破綻や財務危機状態による負の外部性が人々の経済厚生を強く影響する経済では、計画者は一意の最適経路を選択することを可能にする。

本論は銀行取引モデルの動学分析に重点を置いてきたが、最後に昨今の銀行理論の研究について述べる。[7] 銀行理論の発展はDiamond and Dybvig (1983)によりモデルのフレームワークが形付けられた。消費者の預金を銀行がプールし、預金者の流動性選好に応じて預金支払いを行う契約を結ぶことで効率的な資源配分が可能になることを論理的に証明した。また、彼らは、同じフレームワークの中で銀行システムが常に自己実現的な銀行取付けのリスクに晒されている均衡も証明した。

しかし、後のAllen and Gale (1998) は、銀行取付けが銀行の健全性やマクロ経済の景気循環とは無関係に発生するものではなく、最適契約の下でファンダメンタルズが悪化すれば銀行取付けが発生しうることを従来のモデルを使って説明した。つまり、銀行取付けは、最適契約（分かりやすく言えば、最適行

[7] 加藤・敦賀 (2012) を参照。

動）の結果であるというのである。

こうした流れを踏まえて銀行取引モデルに関する文献では、社会計画的な銀行システムに比べて自由放任的な銀行システムのレバレッジ（同義的に、預金の早期グロスリターン、もしくは、銀行の負債のサイズ）は過剰になることが示された。本論では、社会計画的な銀行システムを基礎とする動学分析のみを行った。近年では、自由放任的な銀行システムから生じるオーバーレバレッジを規制する理論的なフレームワークの研究が進められている。

参考文献

加藤涼、敦賀貴之 (2012)「銀行理論と金融危機：マクロ経済学の視点から」、日本銀行金融研究所、Discussion Paper No. 2012-J-5。

Allen, F. and D. Gale (1998), “Optimal Financial Crise”, *Finance*, Vol.53, pp. 1245-1284.

Allen, F., E. Carletti and D. Gale (2014), “Money, Financial Stability and Efficiency”, *Journal of Economic Theory*, Vol.149, pp. 100-127.

Allen, F. and D. Gale (2017), “How Should Bank Liquidity be Regulated?”, in *Achieving Financial Stability: Challenges to Prudential Regulation*, edited by D. Evanoff, G. Kaufman, A. Leonello, and S. Manganelli, World Scientific Press, Chapter 11, 135-157.

Diamond, D. W. and P. H. Dybvig (1983), “Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity”, *Journal of Political Economy*, Vol.91, No.3, pp. 401-419.

Ennis, H. M. and T. Keister (2003), “Economic Growth, Liquidity, and Bank Runs”, *Journal of Economic Theory*, Vol.109, Issue 2, April, pp. 220-245.

Gale, D., A. Gamba and M. Lucchetta (2018) “Dynamic Bank Capital Regulation in Equilbrium”, *Meeting Papers, Society for Economic Dynamics*.

Gertler, M. and N. Kiyotaki (2015), “Banking, Liquidity, and the Bank Runs in an Infinite Horizon Economy”, *American Economic Review, July*, Vol.105, No.7, pp. 2011-2043.

Jones, C. I. (1998), *Introduction to Economic Growth*, W. W. Norton & Company, Inc.（チャールズ I. ジョーンズ、監訳：香西泰『経済成長理論入門：新古典派から内生的成長理論へ』日本経済新聞社）

（あおき　しん　本学専任講師）