＜論文＞

連続時間型の動学的最適問題で構成される流動性需要の銀行モデル

青　木　　　慎

【要旨】

本論は､流動性需要を取り扱った銀行モデルについて､静学的最適問題をベースに連続時間型として再構成した最適問題を動学的に分析することを目的とする。本モデルは、非常に簡易的で資産が実質預金のみであり、消費者は預金の資産運用のみで消費を行う｡この動学分析を通じて､銀行取付けが発生しなかったケースでは､実質収益率の均衡値の水準に応じて動学方程式体系は「決定的」であるか否かを判別できることを示す。また、実質収益率が極端に低い、つまり０である場合、銀行取付けが発生することを証明する。

【キーワード】

流動性需要、銀行取付け、誘因効率性（誘因適合性)、流動性リスク、均衡経路の不決定性

１．はじめに

本論は、銀行モデルの流動性需要に焦点を当てて、消費者の効用関数を用いた最適問題の解法を通じた主体の行動分析を行う。流動性需要は、資金を貸し出した者が満期を待たずして途中で資金を必要とするというものである。こうした需要は、金融機関を通じて行われる訳であるが、金融機関の運用と調達の期間のミスマッチを生じさせ、金融市場からの資金調達そのものを難しくするリスクを生じさせる。

こうしたミクロ経済学の最適問題の解法をベースに分析を行った文献として、Diamond and Dybvig（1983）から始まり、加藤・敦賀（2012)、清水

(2016)、Allen and Gale (1998)、Allen, Carletti and Gale (2014)、Gertler and Kiyotaki (2015)、Gale, Gamba and Lucchetta (2018)、等がある。

本論のモデルは、Allen and Gale (1998) の静学モデルをフレームワークにして、連続時間型の最適動学モデルとして再構成を行った。こうしたことからモデル構造はとても単純で、資産は実質預金のみであり、消費者は実質預金の運用のみで消費するものとなっている。オリジナルの静学モデルに対して連続時間版に再構成する際に追加した点として、第１に各時点で運用した後の実質預金を次の時点にも使い切らずに蓄積する。第２として規模に関して収穫一定となるような生産関数を用いて、最適条件において実質収益率と限界生産力が一致するというものである。さらに､本論では最適動学問題を解く方法として、Barro and Sala-i-Martin (1995) の文献の数学付論にある最適制御経路に関する摂動法なるものから最適条件を導く。

こうした工夫の結果、本モデルの動学方程式体系は、実質収益率の均衡値の各水準によって「決定的」であるか否か判別を示す。また、この動学体系から銀行取付けが発生することも証明する。

本論の構成は、以下のようになる。第２節では、オリジナルの静学モデルがどのような構成で作られているのかを明らかにするとともに、その最適条件について示す。第３節からは、連続時間型の動学モデルとして再構成の方法を説明する。そして､このモデルを使って最適経路を任意に摂動する関数を用いて、最適条件を導く。第４節では、関数の数式を具体化し、銀行取付けが発生したケースとそうではなかったケースに分けて動学分析を行う。第５節は、結びである。

２．不完全情報の静学モデル

不完全情報の動学モデルについて論じる前に、静学モデルによる基本設定と効率的な資源配分を決定するメカニズムについて示すことから始める。

2．1　基本設定

このモデルの経済主体は、消費者（もしくは、預金者）と銀行である。消費者と銀行の各総数は 1 とする。厳密には、その個人は区間$[0,1]$上に連続的に分布される無限の主体として考える。

モデルの進める順番について、3 つのステップを$s=0,1,2$として考える。ステップ 0 では、経済主体は情報が不完全な状態にいる。ステップ 1 に移行すると、経済主体の不完全であった情報が公開され、当該ステップ（つまり、早期）で行動を選択する経済主体がそれを実行する。そして、ステップ 2 に移行すると、当該ステップ（つまり、遅延）で行動を選択する経済主体がそれを実行する。

ステップ 0 において、消費者は自分の選好について不確かであるものとする。この不確かな選好は、ステップ 1 で早期に消費することを強く好むのか、それともステップ 2 で遅延に消費することを強く好むのか、というものである。つまり、ステップ 0 では、各消費者は、早期消費のグループに属しているのか、それとも遅延消費のグループに属しているのか、判断できない。ただし、ステップ 1 の初めに各消費者は、先のどちらの選好のグループに属しているかが分かるようになる。ステップ 0 のとき、確率γで消費者はステップ 1 の消費を選好し、確率$1-\gamma$で消費者はステップ 2 の消費を選好する。それぞれ「早期消費者」と「遅延消費者」と呼ぶことにする。また、この確率γは、統計的に大数の法則により、一定の真の値であるものと仮定する。したがって、ステップ 0 に個々の消費者がどちらに割り振られるか分からないが、消費者全体で見ると確率γをステップ 1（つまり、早期）の消費を選好する比率として考える。

次に実質資産の運用について説明する。本モデルでは、流動資産や非流動資産を運用するための資金源である実質資産は、実質預金のみである。ステップ 0 に、消費者はD単位の実質預金、いわゆるD単位の消費財を所有している。ただし、ステップ 1 とステップ 2 には、何も与えられることはない。ステップ 0 に、消費者は預金者として銀行に預金する場合、各銀行に均等に資金源とな

る実質資産を預金するものと仮定する。

消費者から預金を受け取った銀行は、その資産を「流動資産」と「非流動資産」に配分し、資産運用を行う。[1] 流動資産は、ステップ s の１単位の実質預金をステップ $s+1$ に１単位の実質預金へと変換する貯蔵技術がある。非流動資産は、$s=0$ の１単位の実質預金を $s+2$ に R 単位の消費財へと変換する生産技術がある。

ここで R について説明を加えておく。（預金単位当たりの）実質預金収入である R は、確率密度関数 $\psi(R)$ をもつ非負の確率変数である。ステップ０では、消費者が自分の選好が確定しないのと同様に R の値も確定していない。しかし、ステップ１に達すると、消費者の選好と共に R の値も確定するものと仮定する。

銀行は、競争的市場を仮定するため、超過利潤が常に0になるように行動する。これは見方を変えれば、銀行の行動は効用を最大化する消費者の行動と同義と言える。

消費者の効用関数は $u(C)$ と表記する。$u(C)$ はフォン・ノイマン＝モルゲンシュテル型の効用関数、つまり、期待効用理論で用いられる効用関数である。不確実な消費選好を持つ消費者の効用関数は次のように表される。

$$\gamma u(C_1)+(1-\gamma)u(C_2) \qquad (1)$$

ただし、C_1 は早期消費、C_2 は遅延消費である。

2. 1　効率的な資源配分

本モデルの資源制約について説明する。銀行はステップ０に消費者から D

1　前者を流動資産、後者を非流動資産と考える他に、安全資産とリスク資産、または、短期資産と長期資産、債券と株式、として分類する見方もある。本論では、流動資産と非流動資産という言い方を用いる。

単位の消費財を預金として受け取る。銀行は D 単位の消費財のうち $x \in [0,1]$ の比率を流動資産に、$1-x$ の比率を非流動資産に割り当てるものとする。

ステップ 1 になると、実質預金収入 R は仮定により公開情報になり、また、個々の消費者の時間選好も認識できるようになる。ステップ 1 では、銀行は銀行取付けのリスクに直面しているものと仮定する。この銀行取付けを予防するため、銀行は事前にステップ 0 に消費者が預金する際、消費者と銀行との間で標準預金契約を結ぶものとする。標準預金契約とは、ステップ 1 に消費者に対して一定額 $\overline{C}$ の支払いを約束し、仮に銀行に約束支払い額 $\overline{C}$ を十分に満たすことのない流動資産しかない場合、すべての利用可能な流動資産を引き出す消費者に対して均等額を銀行が支払うというものである。

ステップ 1 の早期消費者の消費量は、流動資産 xD に制約される。早期消費者の比率が γ であるため、すべての R に対して

$$\gamma C_1 \le xD \tag{2}$$

は、早期消費者の流動性需要制約になる。

ステップ 2 の可能な消費量は、非流動資産の収益 $(1-x)RD$ とステップ 1 の流動資産の残額 $xD-\gamma C_1$ の和として制約される。この式を整理すると、すべての R に対して

$$\gamma C_1 + (1-\gamma)C_2 = [x+(1-x)R]D \tag{3}$$

は、遅延消費者の消費可能な制約である。

効率的な資源配分を考える上で、社会的計画者の最適問題を考える。社会的計画者は、制約条件（2）と（3）を条件にして消費者の目的関数（1）を最大化する。当初の社会的計画者は、この目的関数を最大化する場合、各 R の下で銀行の資産配分率 x を所与として、C_1 と C_2 を決定する。

λ_1 と λ_2 をラグランジュ乗数としてラグランジュ関数を作る。

$$L=\gamma u(C_1)+(1-\gamma)u(C_2)+\lambda_1[xD-\gamma C_1]+\lambda_2[\{x+(1-x)R\}D-\gamma C_1-(1-\gamma)C_2]$$

1階条件を解く。

$$u'(C_1)-\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$u'(C_2)-\lambda_2=0 \qquad (4)$$

(4) 式は、$u'(C_1)-u'(C_2)=\lambda_1\geq 0$、つまり、$C_1\leq C_2$となり、遅延消費者がステップ2までに預金する動機を与える誘因適合性条件を含んでいる。また、(4) 式から、相補性条件

$$[u'(C_1)-u'(C_2)](xD-\gamma C_1)=0 \qquad (5)$$

になる。

銀行は銀行取付けのリスクに直面している。βを非流動資産の収入Rを条件に、早期に預金引き出しを決定した遅延消費者の比率とする。銀行取付けが発生しなかった場合（$\beta=0$)、遅延消費者が早期に預金を引き出すことがないため、標準預金契約より$\overline{C}=C_1<C_2$と言える。(5) 式において$\lambda_1>0$であるから、制約条件 (2) は拘束力を持ち、$xD=\gamma C_1$になる。反対に、銀行取付けが発生した場合（$0<\beta\leq 1$)、標準預金契約より$C_1=C_2<\overline{C}$になる。(5) 式において$\lambda_1=0$であるから、制約条件 (2) は拘束力を持たない。

制約条件(2)が拘束力を持たない場合、ステップ1で遅延消費者の一部であっても預金を引き出すため、流動性制約はすべてのRに対して

$$\gamma C_1+\beta(1-\gamma)C_2=xD \qquad (6)$$

として表される。

各消費者の最適な消費をそれぞれC_1^*とC_2^*とする。また、$\overline{R}$は銀行取付けが発生しない臨界的な実質預金収入として定義する。銀行取付けが発生しな

かった場合（$R \geq \overline{R}$）、(2) 式と (3) 式より、最適な各消費は、

$$C_1^* = xD/\gamma = \overline{C}$$

$$C_2^* = (1-x)RD/(1-\gamma) \quad (7)$$

になる。

反対に、銀行取付けが発生した場合（$R < \overline{R}$）、(3) 式より、最適な各消費は、

$$C_1^* = C_2^* = [x+(1-x)R]D < \overline{C} \quad (8)$$

になる。このとき、早期に預金引き出しを決定した遅延消費者の比率は、$\beta > 0$ であるから、(6) と (8) 式を用いると、

$$\beta = \left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left[\frac{x}{[x+(1-x)R]} - \gamma\right] \quad (9)$$

になる。(9) 式において、$R = 0$ であれば、$\beta = 1$ になるため、遅延消費者は誰もステップ 2 まで預金を継続することはない。

最後に、社会的計画者は、R の状態に応じて、(7) 式の C_1^* と C_2^* を (1) 式に代入して、x の 1 階条件を解くと、最適な資産配分率 x^* の解を計算することができる。

3．不完全情報の動学モデル

本節から時間を t とし、各変数は例えば変数 X_t の定義は、t の関数 $X(t)$ を意味する。また、各時点は前節の静学モデルのように 3 つのステップの手順で進むものとする。毎時点において、銀行に預金する消費者と銀行の間では、ステップ 1 に消費者に対して一定額 $\overline{C}_t$ の支払いを約束し、仮に銀行に約束支払い額 $\overline{C}_t$ を十分に満たすことのない流動資産しかない場合、すべての利用可能な流動資産を引き出す消費者に対して均等額を銀行が支払う標準預金契約を

結ぶものとする。

3．1　基本設定

不確実な消費選好を持つ消費者の瞬間的効用関数（instantaneous utility function）は、（1）式によって示される。消費者の目的関数は、

$$U(C_{1,t},C_{2,t})=\int_0^\infty e^{-\rho t}[\gamma u(C_{1,t})+(1-\gamma)u(C_{2,t})]dt \tag{10}$$

とする。ただし、$\rho>0$ は時間選好率である。

静学モデルと同様に、早期消費者の流動性需要制約は、

$$\gamma C_{1,t}\le x_t D_t \tag{11}$$

で表される。

ステップ 2 において、支出側では、一部を消費し、一部を次の時点に貯蓄する。消費者は初期時点で実質預金 D_0 を所有しているが、それ以降は何も与えられることはないものとする。その意味で、無限時間視野を通じてすべての消費者は実質預金を運用した収入（または、取り崩す）のみで消費して、その他の収入がない状況を想像すると良い。こうした状況から消費者は、ステップ 2 ですべて消費尽くすことはしない。

連続時間の動学モデルでは、実質収益率を r_t として定義する。静学モデルでは、（預金単位当たりの）実質預金収入を R として定義した。R には元金が含まれるから $R=1+r$ になる。各時点のステップ 1 で確定する実質預金の生産量は

$$[x+(1-x)R]D=[x+(1-x)(1+r)]D=D+r(1-x)D$$

になる。来期の実質預金を D_{+1} と定義すれば、離散時間型の遅延消費者の消費可能な制約は、

$$D_{+1}=D+r(1-x)D-\gamma C_1-(1-\gamma)C_2$$

になる。

先の離散時間型の制約の近似式として、連続時間型で表記すると遅延消費者の消費可能な制約は、

$$\dot{D}_t = r_t(1-x_t)D_t - \gamma C_{1,t} - (1-\gamma)C_{2,t} \tag{12}$$

になる。$\dot{D}_t$ の上の'・'（ドット）は時間で微分した変数であることを意味する。

3. 2　ラグランジュ関数とハミルトニアン関数

本項では、非線型の最適問題を解く静学的手法を出発点とし、摂動法を用いて動学的最適問題を解くことを考える。初めに、有限時間視野の動学的最適問題から始める。その上で遅延消費者の消費可能な制約（12）の右辺を

$$r_t(1-x_t)D_t - \gamma C_{1,t} - (1-\gamma)C_{2,t} = g(D_t, C_{1,t}, C_{2,t}, x_t) \tag{13}$$

と定義する。制約条件が（11)、(12）式であり、目的関数が（10）であるから、(13）式も用いて、ラグランジュ関数の設定は以下のようになる。

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T e^{-\rho t}[\gamma u(C_{1,t}) + (1-\gamma)u(C_{2,t})]dt + \int_0^T e^{-\rho t}\lambda_{1,t}[x_t D_t - \gamma C_{1,t}]dt \\ &+ \int_0^T e^{-\rho t}\lambda_{2,t}[g(D_t, C_{1,t}, C_{2,t}, x_t) - \dot{D}_t]dt + S(D_T) \end{aligned} \tag{14}$$

(14）式について説明を加えておく。$\lambda_{1,t}$ と $\lambda_{2,t}$ は動学的ラグランジュ乗数である。0 と T の間の各時点 t に対して 1 つずつのそれぞれ無限個（連続体）の（11）と（12）の制約条件が存在しているので、それに対応するそれぞれ無限個の $\lambda_{1,t}$ と $\lambda_{2,t}$ のラグランジュ乗数が存在する。[2] また、後で示されるが $\lambda_{1,t}$ は早期消費の限界効用と遅延消費の限界効用の差であり、$\lambda_{2,t}$ は遅延消費の限

---

[2] シャドウ・プライスである $\lambda_{2,t}$ は、（0 時点における効用の単位で測定された）t 時点における実質預金の追加的 1 単位の価格あるいは価値とは、単純になり得ない。その理由として、モデルの中に早期消費者の制約条件 (11) が拘束的ある場合にそうした問題が起きるからである。

界効用として解釈される。(14) 式の右辺の第 2 項と第 3 項は、すべての制約条件の合計は 0 になる。$S(D_T)$ は、実質預金 D_T を関連づける最終価値を表している。

静学的問題の一組の 1 階条件を求めるために、0 と T の間のすべての t について x_t を所与として D_t 、$C_{1,t}$、$C_{2,t}$ 、に関して L を最大化することを考える。その工夫として $d(e^{-\rho t}\lambda_{2,t}D_t)/dt = e^{-\rho t}(-\rho\lambda_{2,t}D_t + \dot{\lambda}_{2,t}D_t + \lambda_{2,t}\dot{D}_t)$ を利用して、ラググランジュ関数を書き換える。

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T e^{-\rho t}[\gamma u(C_{1,t}) + (1-\gamma)u(C_{2,t}) + \lambda_{1,t}(x_t D_t - \gamma C_{1,t}) + \lambda_{2,t} g(D_t, C_{1,t}, C_{2,t}, x_t)]dt \\ &+ \int_0^T e^{-\rho t}(\dot{\lambda}_{2,t} - \rho\lambda_{2,t})\dot{D}_t dt + \lambda_{2,0}D_0 + [S(D_T) - e^{-\rho T}\lambda_{2,T}D_T] \end{aligned} \tag{15}$$

(15) 式の第 1 項の積分の角括弧[ ]の式は経常価値ハミルトニアン関数である。

$$\begin{aligned} H(D_t, C_{1,t}, C_{2t}, x_t, \lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) = &\gamma u(C_{1,t}) + (1-\gamma)u(C_{2,t}) + \lambda_{1,t}(x_t D_t - \gamma C_{1,t}) \\ &+ \lambda_{2,t} g(D_t, C_{1,t}, C_{2,t}, x_t) \end{aligned} \tag{16}$$

(15) 式にハミルトニアン関数 (16) を代入する。

$$\begin{aligned} L = &\int_0^T e^{-\rho t}[H(D_t, C_{1,t}, C_{2t}, x_t, \lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) + (\dot{\lambda}_{2,t} - \rho\lambda_{2,t})D_t]dt \\ &+ \lambda_{2,0}D_0 + [S(D_T) - e^{-\rho T}\lambda_{2,T}D_T] \end{aligned} \tag{17}$$

$C_{1,t}^*$、$C_{2,t}^*$ 、D_t^* でそれぞれ制御変数と状態変数の最適時間経路を表すものとする。最適経路 $C_{1,t}^*$、$C_{2,t}^*$ 、D_t^* を任意の摂動関数 $p_{1,t}$、$p_{2,t}$、$p_{3,t}$ によって変化すると仮定する。また、D_T^* の摂動関数は dD_T とする。こうした変化をすることで、各変数の近傍の経路を以下のように作ることができる。

$$C_{1,t}(\varepsilon) = C_{1,t}^* + \varepsilon \cdot p_{1,t}$$

$$C_{2,t}(\varepsilon) = C_{2,t}^* + \varepsilon \cdot p_{2,t}$$

$$D_t(\varepsilon)=D_t^*+\varepsilon\cdot p_{3,t}$$
$$D_T(\varepsilon)=D_T^*+\varepsilon\cdot dD_T \tag{18}$$

ハミルトニアン関数（16）に関して微分される変数に限定して略記した上で、（18）式を使ってラグランジュ関数（17）を再定義する。

$$\begin{aligned}\overline{\overline{L}}(\varepsilon)=&\int_0^T e^{-\rho t}[H(D_t(\varepsilon),C_{1,t}(\varepsilon),C_{2t}(\varepsilon))+(\dot{\lambda}_{2,t}-\rho\lambda_{2,t})D_t(\varepsilon)]dt\\&+\lambda_{2,0}D_0+[S(D_T(\varepsilon))-e^{-\rho T}\lambda_{2,T}D_T(\varepsilon)]\end{aligned} \tag{19}$$

（19）式において、もとの経路が最適であれば、$\partial\overline{\overline{L}}(\varepsilon)/\partial\varepsilon=0$ になる必要がある。

$$\begin{aligned}\overline{\overline{L}}(\varepsilon)=&\int_0^T e^{-\rho t}\left[\frac{\partial H}{\partial C_{1,t}}\cdot p_{1,t}+\frac{\partial H}{\partial C_{2,t}}\cdot p_{2,t}+\left(\frac{\partial H}{\partial D_t}+\dot{\lambda}_{2,t}-\rho\lambda_{2,t}\right)p_{3,t}\right]dt\\&+[S'(D_T)-e^{-\rho T}\lambda_{2,T}]dD_T=0\end{aligned} \tag{20}$$

上式の各構成要素が 0 になる場合のみ、（20）式は $p_{1,t}$、$p_{2,t}$、$p_{3,t}$、dD_T で表されるすべての摂動経路に対して成立する。すなわち、次式が成立する。

$$\partial H/\partial C_{1,t}=0$$
$$\partial H/\partial C_{2,t}=0$$
$$\dot{\lambda}_{2,t}=\rho\lambda_{2,t}-\partial H/\partial D_t$$
$$S'(D_T)=e^{-\rho T}\lambda_{2,T} \tag{21}$$

（21）の最初の 2 つの式は、最大値原理であり、（21）の 3 番目の式は、随伴方程式であり、（21）の最後の式は、横断性条件である。

静学的問題では、不等号のある制約条件に付随する相補性条件は制約条件が拘束的でなければ、それに付随するラグランジュ乗数が 0 になることを規定している。本論では、ラグランジュ乗数は $\lambda_{1,t}$ と $\lambda_{2,t}$ の 2 つがある。

$\lambda_{1,t}$ に関連付ける相補性条件は次のようになる。

$$\lambda_{1,t}[x_t D_t - \gamma C_{1,t}] = 0 \tag{22}$$

前述で（14）式の右辺の第 2 項は、すべての制約条件の合計は 0 になることを述べた。（22）式は、この点を満たすことを意味する。

次に、$\lambda_{2,T}$ に関連付ける相補性条件を考える。（21）の最後の式により、$S''(D_T) = 0$ である。従って、$S(D_T) = S'(D_T)D_T$ を意味する。ところで、計画期間の期末に残される実質預金 D_T は非負値であり、この制約条件から計画期間の期末では $S'(D_T)D_T = 0$ となる必要がある。この方程式により $S'(D_T) > 0$ であれば、主体は $D_T = 0$ 、つまり、期末の実質預金をすべて使い切らなければならない。また、$D_T > 0$ であれば、$S'(D_T) = 0$ でなければならないことを規定する。（21）の最後の式を用いることで、$\lambda_{2,t}$ に関連付ける相補性条件は、横断性条件として以下のように書き直せる。

$$e^{-\rho T}\lambda_{2,T}D_T = 0 \tag{23}$$

3．2　無限時間視野と最適条件

本項では、消費者の目的関数（10）で見られるように無限時間視野問題として考えることである。初めに、1 階条件は、前項の有限時間視野のケースと同じであり、（21）の上の 2 つの式を（16）式のハミルトニアンと制約条件（13）を使って解くと以下のようになる。

$$du(C_{1,t})/dC_{1,t} = \lambda_{1,t} + \lambda_{2,t}$$
$$du(C_{2,t})/dC_{2,t} = \lambda_{2,t} \tag{24}$$

また、（21）の 3 番目の随伴方程式も同じである。

$$\dot{\lambda}_{2,t} = (\rho - r_t(1-x_t))\lambda_{2,t} - \lambda_{1,t}x_t \tag{25}$$

有限時間視野のケースとの違いは、横断性条件（23）である。無限時間視野のケースでは、横断性条件を次の式が良く使われる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{2,t}D_t = 0 \tag{26}$$

（26）式は、最終的に D_t が漸近的にプラスに留まる場合、その価格 $e^{-\rho t}\lambda_{2,t}$ は漸近的に 0 に近づかなければならないことを意味する。ただし、（26）式は、厳密な意味で最適性の必要条件ではないことに注意する。とはいえ（26）式が横断性条件として用いられる根拠は、ほとんどのケースでこの式が真の横断性条件を満たすと考えられるからである。

最後に、最適行動の主体は、r_t の状態に応じて、（11）の等式や（24）式などから $C^*_{1,t}$ と $C^*_{2,t}$ を（16）式に代入して、x_t の 1 階条件を解くことで最適な資産配分率 x^*_t が求まる。この点について、次節で効用関数を具体化して問題を解き確認を試みる。

4．流動性需要の銀行モデルの一例

本節では、効用関数を具体化して流動性需要がある銀行モデルにおける動学的最適問題を解く。瞬間的効用関数は、次のように具体化する。

$$u(C_{j,t}) = \log C_{j,t} \qquad j = 1,2$$

これを用いて（24）式の 1 階条件を適用する。

$$1/C_{1,t} = \lambda_{1,t} + \lambda_{2,t}$$

$$1/C_{2,t} = \lambda_{2,t} \tag{27}$$

（22）式の相補性条件に（27）式の１階条件を用いると、次のようになる。

$$(1/C_{1,t}-1/C_{2,t})[x_tD_t-\gamma C_{1,t}]=0 \tag{28}$$

銀行取付けが発生しなかった場合では、（28）式は$\gamma C_{1,t}=x_tD_t$になる。これは、標準預金契約におけるステップ１に消費者に対して支払われる一定額は、$\overline{C}_t=x_tD_t/\gamma$に設定されていることになる。各消費の関係は、$C_{2,t}\geq C_{1,t}=\overline{C}_t$になる。

反対に、銀行取付けが発生した場合、$C_{2,t}=C_{1,t}<\overline{C}_t$になる。流動性需要の制約条件は、（6）式に時間$t$を考慮すると

$$\gamma C_{1,t}+\beta(1-\gamma)C_{2,t}=x_tD_t \tag{29}$$

であり、$\beta>0$を非流動資産の実質収益率r_tを条件に早期に預金引き出しを決定した遅延消費者の比率とし、一定とする。この場合の消費の変数を$C_{BR,t}=C_{1,t}=C_{2,t}$と定義する。（29）式を整理すると、銀行取付けが発生した場合の消費は、

$$C_{BR,t}=x_tD_t/\tilde{\beta}\;;\qquad \tilde{\beta}=\gamma+(1-\gamma)\beta \tag{30}$$

になる。

最後に、企業の利潤最大化行動をついて述べる。非流動資産を投じた財の生産関数を$F((1-x_t)D_t)$と定義すると、$F'(\cdot)>0$、$F''(\cdot)<0$という性質がある。先の性質を満たすように生産関数を$F((1-x_t)D_t)=Z_t((1-x_t)D_t)^{\alpha}$、$0<\alpha<1$と具体化する。企業の生産行動において、労働費用を無視するものと仮定する。つまり、企業の費用は、資本のレンタル費用のみとなる。財の価格を１に基準化すると、企業の利潤関数は、

$\Pi_t = Z_t((1-x_t)D_t)^{\alpha} - r_t(1-x_t)D_t$ である。競争的企業を仮定すると、企業の利潤最大化の必要条件は、

$$r_t = \alpha Z_t((1-x_t)D_t)^{\alpha-1} \tag{31}$$

になる。

ここからは、後述の動学分析を円滑に進めるために、初期に $Z_0 = \bar{Z}$ が確定すると、すべての t において $Z_t = \bar{Z}$ であるものとする。

4. 1　銀行取付けが発生しなかったケース

本項では、銀行取付けが発生しなかったケースを考える。（28）式より、最適な早期消費は、

$$C^*_{1,t} = x_t D_t / \gamma \tag{32}$$

になる。また、（32）式を（12）式に代入することで、最適な遅延消費 $C^*_{2,t} = [\{r_t(1-x_t)-x\}D_t - \dot{D}_t]/(1-\gamma)$ と（32）式をハミルトニアン（16）に代入して、x_t の1階条件を解く。

$$C^*_{2,t} = (1+r_t)x_t D_t / \gamma \tag{33}$$

（33）式を（31）式に代入すれば、以下のような方程式を得る。

$$\Gamma_1(r_t) = \alpha Z_t\{D_t - \gamma C^*_{2,t}/(1+r_t)\}^{\alpha-1} - r_t$$

ここで Z_t、$C^*_{2,t}$、D_t、を所与として、以下の関係が成立する。

$$\Gamma_1'(r_t) = \alpha(\alpha-1)Z_t\{D_t - \gamma C^*_{2,t}/(1+r_t)\}^{\alpha-2}(\gamma C^*_{2,t}/(1+r_t)^2) - 1 < 0$$

$$\Gamma_1(0) = \alpha Z_t(D_t - \gamma C^*_{2,t})^{\alpha-1} > 0$$

$$\lim_{r_t\to\infty}\Gamma_1(r_t) = -\infty < 0$$

従って、上記の不等式の成立は、一意的な実質収益率 r_t の経路が存在することを証明している。

（33）式を（31）式に代入し、r_t に対して $C^*_{2,t}$ と D_t のそれぞれについて全微分すると、暗黙的な関数として次の関数が定義できる。

$$r_t = r(D_t, C^*_{2,t}) \ ; \ r_D = \partial r_t / \partial D_t < 0 \ , \ r_{C_2} = \partial r_t / \partial C^*_{2,t} > 0 \qquad (34)$$

（34）式は、厳密には $r_t = r(D_t, C^*_{2,t}; Z_t);\ \partial r_t / \partial Z_t > 0$ であるが、必要がない限り略記する。

銀行取付けが発生しなかったケースのモデルの基本動学方程式は、以下のようになる。

$$\dot{D}_t = r(D_t, C^*_{2,t})D_t - C^*_{2,t} = f_1(D_t, C^*_{2,t})$$
$$\dot{C}^*_{2,t} = \{r(D_t, C^*_{2,t}) - \rho\}C^*_{2,t} = f_2(D_t, C^*_{2,t}) \qquad (35)$$

(27)、(32) － (34) の各式を (12)、(25) の各式に代入すれば、(35) の2次元（2変数）の非線形微分方程式体系が得られる。

次に、基本動学方程式体系 (35) の均衡解 (D^*, C^*_2) の性質について検討する。(35)式に $\dot{D}_t = \dot{C}^*_{2,t} = 0$ という条件を代入することにより、均衡解が得られる。このモデルの均衡解を決定する連立方程式は、以下のようになる。

$$r^* = \rho = C^*_2 / D^*$$
$$x^* = \gamma\rho / (1+\rho)$$
$$C^*_1 = \rho D^* / (1+\rho) \qquad (36)$$

結論から述べると、(36) の均衡解は一意であることが言える。これを確認するために、(36) 式を (31) 式に代入する。

$$D^* = \frac{1+\rho}{1+\rho(1-\gamma)}\left(\frac{\alpha\bar{Z}}{\rho}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

上式より、初期条件において、静学モデルのステップ１で $\bar{Z}$ が与えられると、実質預金の均衡値 D^* が与えられる。生産性 $\bar{Z}$ と均衡実質預金 D^* の間には正の関係がある。つまり、生産性 $\bar{Z}$ が高くなると、均衡実質預金 D^* も高い水準になる。このように均衡実質預金 $D^* > 0$ が与えられると、それぞれの均衡消費は $C_1^* = \rho D^* / (1+\rho)$ 、$C_2^* = \rho D^*$ に確定する。さらに、(36) の均衡解は、$C_1^* < C_2^*$ であるから誘因適合性条件を満たしている。

次に、基本動学方程式 (35) の均衡点の動学的安定性について数学的に分析する。(35) 式の均衡点で評価されたヤコビ行列 J は、以下のようになる。

$$J = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$f_{11} = r_D D^* + r^* \qquad f_{12} = r_{C_2} D^* - 1$$

$$f_{21} = r_D C_2^* < 0 \qquad f_{22} = r_{C_2} C_2^* > 0$$

このヤコビ行列の特性方程式 $\Phi(b) = \left|bI - J\right| = 0$ の２つの根を b_1 と b_2 とする。この b_1 と b_2 を用いると $traceJ = b_1 + b_2$ と $\det J = b_1 b_2$ であり、また以下のようになる。

$$traceJ = f_{11} + f_{22} = r_D D^* + r^* + r_{C_2} C_2^*$$

$$\det J = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = r^* r_{C_2} C_2^* + r_D C_2^*$$

ここで、次の結果が得られる。

定理 1

(1) $0 < r^* < -r_D / r_{C_2}$ を満たすものとする。非線形動学体系(35)の均衡点は、小域的にサドル・ポイントになる。

(2) $r^* > -r_D / r_{C_2}$ を満たすものとする。さらに、実質収益率の預金弾力性が十分に大きく、実質収益率の遅延消費弾力性が十分に小さい場合、非線形動学体系（35）の均衡点は、小域的に安定になる。

証明：(1) $0 < r^* < -r_D / r_{C_2}$ を満たすとき、$\det J < 0$ になる。故に、ヤコビ行列の特性方程式 $\Phi(b)$ の 1 つの根は正値であり、残りの 1 つの根は負値である。

(2) $r^* > -r_D / r_{C_2}$ を満たすとき、$\det J > 0$ になる。この場合、ヤコビ行列の特性方程式 $\Phi(b)$ の 2 つの根は、2 つの可能性がある。一方では、2 つの根が正値であり、他方では、2 つの根が負値である。ここで、実質収益率の預金弾力性 $-r_D D^* / r^*$ が十分に大きく、実質収益率の遅延消費弾力性 $r_{C_2} C_2^* / r^*$ が十分に小さい場合、$traceJ < 0$ になる。これにより、特性方程式 $\Phi(b)$ の 2 つの根は、負値になる。■

基本動学方程式（35）では、実質預金 D_t が先決変数であり、遅延消費 $C_{2,t}^*$ が非先決変数である。つまり、実質預金の初期条件 D_0 が与えられると、代表的な主体は、(36) 式の均衡点に収束するように最適な遅延消費 $C_{2,0}^*$ を選ぶことができる。定理 1 （1） は、この要件を満たし、基本動学方程式体系（35）の均衡経路は「決定的」であると言える。ちなみに、均衡点に収束することが最適行動である根拠は、横断性条件（26）を満たさなければならないからであ

る。定理1（2）は、均衡点に収束する経路が無数にあるため、基本動学方程式体系（35）の均衡経路は「不決定的」であると言える。

4．2　銀行取付けが発生したケース

本項では、銀行取付けが発生したケースを考える。(28) 式より、$\gamma C_{1,t} < x_t D_t$ になるため、遅延消費者の一部が静学モデルのステップ1で預金を引き出して貯蔵技術を用いてステップ2でそれを消費する。標準預金契約に基づき、すべての利用可能な流動資産を引き出す消費者に対して均等額を銀行が支払うことになる。この均等額を $C_{BR,t} = C_{1,t} = C_{2,t}$ とした。

ところで、標準預金契約では、ステップ1に消費者に対して一定額を支払う約束しているが、この一定額は $\overline{C}_t = x_t D_t / \gamma$ である。銀行取付けが発生したケースでは、$C_{BR,t} < \overline{C}_t$ となる。

(30) 式をハミルトニアン (16) に代入して、x_t の1階条件を解く。このとき、(27) 式において、$\lambda_{1,t} = 0$ であることに注意する。すると、以下の結果が得られる。

$$r_t \tilde{\beta} = 0 \tag{38}$$

(38) 式は、$\tilde{\beta} > 0$ であるから、すべての t において $r_t = 0$ を意味する。つまり、(31) 式より $Z_t = 0$ のときに銀行取付けが発生する。ただし、(38) 式は遅延消費者の全員がステップ1で預金を引き出した場合（つまり、$\beta = 1$）でも成立することに注意する[3]。

[3] $r_t < 0$ のように実質預金の元本割れが発生した場合の最適行動を示すことができない。合理的に推測すれば、初期の時点で $r_0 < 0$ と預金者が認識すれば、それ以降の時点

銀行取付けが発生したケースのモデルの微分方程式体系は、以下のようになる。

$$\dot{D}_t = -C_{RB,t}$$
$$\dot{C}_{BR,t} = -\rho C_{BR,t} \tag{40}$$

このケースでは、流動資産と非流動資産が同じ貯蔵技術で財を変換する（つまり、無差別である）ため、最適な資産配分率 x^* は（30）式を満たように $C_{BR,0}$ の初期条件によって無数にある。故に、微分方程式体系（40）式の均衡経路は不決定的であると言える。

次に、仮に $C_{BR,0} = \tilde{C}$ が与えられると、（40）式よりすべての t における各消費は次のような方程式で表される。

$$C_{BR,t} = \tilde{C}e^{-\rho t} \tag{41}$$

（41）式は、実質預金が非負値の制約に関係なく最終時点では消費が0になることを示している。通常、もはや消費ができないほどに実質預金をすべて使い果たすことが合理的な主体の行動と言える。故に、主体が合理的な行動を取るならば、ある時点 $t = \tilde{t}$ で $D_{\tilde{t}} = 0$ となり、つまり $C_{BR,\tilde{t}} = 0$ となるから、動学モデルは停止する。これまでの結果を以下のようにまとめる。

定理 3

銀行取付けが発生したケースでは、すべての t において $r_t = 0$ であり、微分方程式体系（40）の均衡経路は不決定的である。微分方程式体系（40）の下で、D_0 が所与で（30）式を満たす任意の初期条件 $C_{BR,0} = \tilde{C}$ が与えられると、

で誰も銀行に資産を預金するという行動を取ることはない。この推測が妥当であるならば、$r_0 < 0$ のときに銀行を仲介した最適な動学は示すことができない。

消費の最適経路は（41）式になる。最後に、主体が合理的な行動を取るならば、ある時点$t=\tilde{t}$で実質預金が0となり、各消費も0であるから、動学モデルは停止する。

5．おわりに

初めに、これまでの本論のモデルの設定について整理しておく。本論のモデルは、Allen and Gale（1998）の静学モデルをフレームワークにして、連続時間型の最適動学モデルとして組み替えた。その際、オリジナルのモデルに生産関数を追加し、競争的な銀行の下で実質収益率とその限界生産力が一致する最適条件を適用した。

簡単な説明ではあるがこうした背景の下で、動学方程式体系を分析した結果、次のことを示すことができた。銀行取付けが発生しなかったケースでは、実質収益率の均衡水準がある閾値より低い場合、均衡経路は安定であり、「決定的」あることが示せた。反対に、その収益率の均衡値がある閾値を上回ると、均衡経路は安定する場合もあれば、不安定になる場合にもなる。しかし、実質収益率の預金弾力性が十分に大きく、実質収益率の遅延消費弾力性が十分に小さい場合、均衡経路は安定ではあるが「不決定的」になる。この結果、実質収益率の均衡値は、あまり高くなり過ぎると、主体の行動は経済条件によってどのような最適経路を選択するか分からなくなる懸念がある。また、極端ではあるが実質収益率が0になる場合、銀行取付けが発生することが証明できた。これは現実的に考えても当然のことであると言える。

本論は、オリジナルの静学モデルだけでなく、そのモデルから派生した動学モデルにおいても銀行取付けの有無に応じて、最適行動の反応を示すことができたことは研究成果である。

参考文献

清水克俊（2016）『金融経済学』東京大学出版会。

加藤涼、敦賀貴之（2012）『銀行理論と金融危機－マクロ経済学の視点から―』日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー No.2012-J-5。

Allen, F. and D. Gale (1998), "Optimal Financial Crise", *Finance*, Vol.53, pp. 1245-1284.

Allen, F., E. Carletti and D. Gale (2014), "Money, Financial Stability and Efficiency", *Journal of Economic Theory*, Vol.149, pp. 100-127.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1995), *Economic Growth*, McGraw-Hill, Inc.（R. J. バロー、X. サラ-イ-マーティン、訳：大住圭介（1998）『内生的経済成長理論Ⅰ・Ⅱ』九州大学出版会。）

Diamond, D. W. and P. H. Dybvig (1983), "Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity", *Journal of Political Economy*, Vol.91, No.3, pp. 401-419.

Gale, D., A. Gamba and M. Lucchetta (2018) "Dynamic Bank Capital Regulation in Equilbrium", *Meeting Papers 680, Society for Economic Dynamics*.

Gertler, M. and N. Kiyotaki (2015), "Banking, Liquidity, and the Bank Runs in an Infinite Horizon Economy", *American Economic Review*, July, Vol.105, No.7, pp. 2011-2043.

（あおき　しん　本学准教授）